Name : Salma Azaouzi.

Title : Généralisation de quelques principes d'incertitude sur les extensions compactes de $\mathbb{R}^n$.

Position : "Assistant Professor" at IPEIS "Institut prépératoire aux études d'ingénieurs de Sfax".

Date of defense : December 19, 2013.

Referees : S. Ben Farah (Monastir) and S. Thangavelu (Bangalore).

Abstract : La théorie des groupes de Lie, nommée ainsi en l'honneur de son fondateur le mathématicien norvégien Sophus Lie au XIXème siècle (précisément dans la période 1870 - 1880), s'introduit naturellement dans de nombreuses questions de mathématiques pures et appliquées.
D'abord cette théorie a été considérée comme une partie assez marginale des mathématiques, puis tout au long du XXème siècle, elle a continué à être développée par d'autres mathématiciens comme Wilhelm Killing, Elie Cartan, Herman Weyl. Et c'est avec la mise en place de la notion des groupes topologiques (appelés initialement groupes continus) que cette théorie a commencé à jouer un rôle crucial dans la plupart des branches des mathématiques modernes.
En relation avec cette théorie et parmi les problèmes posés en analyse harmonique non commutative, se présentent les principes d'incertitude. Ces principes sont largement étudiés sur la droite réelle et dans le cadre des groupes de Lie nilpotents, connexes et simplement connexes.
L'étude de ces principes a commencé dès l'année 1933 avec le théorème de Hardy qui est basé sur la caractérisation des fonctions sur $\mathbb{R}$ satisfaisant le couple de condition :

$$|f(x)| \leq Ce^{-\alpha x^2},\ |\hat{f}(\xi)| \leq Ce^{-\beta\xi^2}\ (*)$$

pour des réels positifs α et β.
La transformation de Fourier étant définie comme suit :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

Hardy a démontré qu'une fonction mesurable f vérifiant les conditions proposées en (*), est l'une des trois suivantes :

- $f = 0$ si $\alpha\beta > \frac{1}{4}$;
- $f = \lambda e^{-\alpha x^2}$ si $\alpha\beta = \frac{1}{4}$;
- dans le cas où $\alpha\beta < \frac{1}{4}$, une infinité de fonctions linéairement indépendantes vérifie les conditions de (*).

Sundaram Tangavelu a donné une généralisation à ce résultat de façon à dominer la fonction et sa transformée de Fourier par des polynômes en plus des gaussiennes :
soient $q \in \mathbb{N}$, α et β des réels positifs et soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant aux deux conditions :

(i) $|f(x)| \leq C(1+x^2)^q e^{-\alpha x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $|\hat{f}(\xi)| \leq C(1+\xi^2)^q e^{-\beta \xi^2}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Alors on obtient les conclusions suivantes :

1. $f = 0$ presque partout si $\alpha\beta > 1/4$.

2. Si $\alpha\beta < 1/4$, alors il existe une infinité de fonctions linéairement indépendantes vérifiant *(i)* et *(ii)*.

3. Si $\alpha\beta = 1/4$, la fonction f est de la forme $f(x) = P(x)e^{-\alpha x^2}$ où P est un polynôme de degré $\leq 2q$.

Puis ses résultats ont été généralisés immédiatement dans le cadre de $\mathbb{R}^n$.

Le théorème de Hardy a été généralisé dans le cas des groupes de Lie nilpotent, connexes et simplement connexes. Plusieurs chercheurs aussi ont essayé de donner des analogues à ce théorème dans le cas des groupes de déplacement Euclidien $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ et celui de Cartan.

Pour le cas des groupes de déplacement Euclidien, on désigne par $M_n = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. Il est bien connu que toute représentation unitaire irréductible de dimension infinie de M_n est équivalente à la représentation induite $\pi_{r,\sigma} := \mathrm{ind}_{SO(n-1)\ltimes\mathbb{R}^n}^{SO(n)\ltimes\mathbb{R}^n}(\sigma \otimes \chi_r)$ pour $r > 0$ et $\sigma \in \widehat{SO(n-1)}$, où χ_r est le caractère sur $\mathbb{R}^n$ défini par $\chi_r(x) = e^{-irx_n}$, pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Par ailleurs, l'ensemble des représentations génériques dans $\widehat{M_n}$ qui apparaîssent dans la mesure de Plancherel de M_n est identifié à l'ensemble de toutes les représentations induites $\pi_{r,\sigma}$ où le couple (r, σ) parcours $\mathbb{R}_+^* \times \widehat{SO(n-1)}$.
Sundari a prouvé en 1998 que si une fonction mesurable f sur M_n satisfait aux assertions :

1. $|f(k,x)| \leq \ Ce^{-\alpha\|x\|^2}, \ (k,x) \in M_n$

2. $\|\pi_{r,\sigma}(f)\|_{HS} \leq \ C_\sigma e^{-\beta r^2}, \ (r,\sigma) \in \mathbb{R}_+^* \times \widehat{SO(n-1)}$

pour des constantes positives C_σ, α, β et C, avec C_σ dépend uniquement de σ et $\alpha\beta > \frac{1}{4}$, alors $f = 0$ presque partout.

À leur tour, en 2008, Baklouti et Kaniuth ont traité le cas d'un groupe G unimodulaire, localement compact et à base dénombrable d'ouverts contenant un sous groupe normal fermé N identifié dans ce cas à $\mathbb{R}^n$, et pour lequel on identifie le groupe des automorphismes de N avec le groupe orthogonal $SO(n)$. En considérant S une section de Borel des classes de N, on obtient la version du théorème de Hardy suivante :
Aucune fonction f mesurable sur le groupe G non nulle presque partout ne vérifie les

conditions :

1. $|f(xs)| \leq \varphi(s)e^{-\alpha\|x\|^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $s \in S$, où $\varphi \in L^1(S) \cap L^2(S)$,
2. $\|\pi_{r,\sigma}(f)\|_{HS} \leq \psi_r(\sigma)e^{-\beta r^2}$

pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sigma \in \widehat{SO(n-1)}$ et pour des réels positifs α, β tels que $\alpha\beta > \frac{1}{4}$, où $\psi_r \in l^2(\widehat{SO(n-1)})$ pour laquelle il existe $0 < \gamma < \beta$ et une constante $c > 0$ tels que $\alpha\gamma > \frac{1}{4}$ et $\|\psi_r\|_{l^2(\widehat{SO(n-1)})} \leq ce^{(\beta-\gamma)r^2}$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans le premier chapitre de ma thèse, je m'intéresse à la généralisation du théorème de Hardy dans le cas des extensions compactes de $\mathbb{R}^n$.
Posons alors G le produit semi direct de K et $\mathbb{R}^n$, où K est un sous groupe compact du groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^n$.
Et on munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire qui permet de considérer K comme conjugué à un sous groupe du groupe orthogonal $O(n)$. La mesure de Haar sur G est donnée par le produit $dg := d\nu(k) \otimes dx$ où $d\nu(k)$ est la mesure de Haar normalisée sur K et dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.
Pour décrire le dual unitaire de G on utilise la théorie de Mackey, qui concerne le dual unitaire d'un groupe de Lie à nilradical co-compact.
En considérant χ_ℓ le caractère unitaire de $\mathbb{R}^n$ où $\ell \in \mathbb{R}^n$, K_ℓ le stabilisateur de ℓ sous l'action de K et $(\sigma, \mathfrak{H}_\sigma)$ une représentation unitaire irréductible de K_ℓ, on obtient toutes les représentations unitaires irréductibles de dimension infinie de G qui sont les représentations induites $\pi_{\ell,\sigma} := \mathrm{ind}_{K_\ell \ltimes \mathbb{R}^n}^G(\sigma \otimes \chi_\ell)$. Ces représentations sont réalisées sur l'espace $\mathscr{H}_{\ell,\sigma}$ défini comme étant le complété de l'espace des fonctions continues $\xi : K \to \mathscr{H}_\sigma$ vérifiant la relation de covariance $\xi(ks) = \sigma(s)^*(\xi(k))$ pour $k \in K$ et $s \in K_\ell$, pour la norme

$$\|\xi\|_2 = \Big(\int_K \|\xi(k)\|_{\mathscr{H}_\sigma}^2 d\nu(k)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Les classes d'équivalence de ces représentations sont définies suivant les orbites sous l'action de K et l'équivalence des représentations σ des stabilisateurs conjugués.

La version du théorème de Hardy qu'on donne dans la première partie de ma thèse est la suivante :
soient $q \in \mathbb{N}$, α et β des réels positifs et soit f une fonction mesurable sur G satisfaisant aux conditions :
(i) $|f(k,x)| \leq \varphi(k)(1 + \|x\|^2)^q e^{-\alpha\|x\|^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ and $k \in K$, où $\varphi \in L^2(K)$,
(ii) $\|\pi_{\ell,\sigma}(f)\|_{HS} \leq \psi_\ell(\sigma)(1 + \|\ell\|^2)^q e^{-\beta\|\ell\|^2}$, pour tout $\ell \in \mathbb{R}^n$ et tout $\sigma \in \widehat{K_\ell}$, avec $\|\psi_\ell\|_{l^2(\widehat{K_\ell})} \leq C$ pour une constante positive C indépendante de ℓ.
On obtient alors les conclusions suivantes :

1. $f = 0$ presque partout si $\alpha\beta > 1/4$.

2. Si $\alpha\beta < 1/4$, alors il existe une infinité de fonctions linéairement indépendantes vérifiant *(i)* et *(ii)*.

3. Si $\alpha\beta = 1/4$, la fonction f est de la forme $f(k,x) = \zeta(k,x)e^{-\alpha\|x\|^2}$ où $x \mapsto \zeta(k,x)$ est un polynôme en x de degré $\leq 2q$ et $k \mapsto \zeta(k,x)$ est une fonction de $L^2(K)$.

Le principe d'incertitude de Hardy a été une source d'inspiration pour d'autres mathématiciens qui ont continué à y donner des analogues et des versions multiples toutes basées sur le fait d'imposer des conditions précises sur la croissance de la fonction f ainsi que sa transformée de Fourier et la caractériser selon les paramètres en jeu.

Ce fut le cas de Morgan qui, dans les années trentes, a démontré le théorème de Hardy en utilisant les gaussiennes généralisées. Puis une version $L^p - L^q$ du théorème de Morgan a été développée par Ben Farah et Mokni. Ils affirment qu'en se donnant $p' > 2$, q' son conjugué et $1 \leq p,\ q \leq +\infty$, qu'il n'existe aucune fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^n$ non nulle presque partout qui vérifie les deux conditions :

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{p\alpha\|x\|^{p'}}|f(x)|^p dx < +\infty$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{q\beta\|y\|^{q'}}|\hat{f}(y)|^q dy < +\infty$,.

pour α,β deux réels positifs tels que $(\alpha p')^{1/p'}(\beta q')^{1/q'} > (\sin \frac{\pi}{2}(q'-1))^{1/q'}$.

Ce dernier résultat a été, en 2007, par S. Ayadi et K. Mokni dans le cas du groupe $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. Les auteurs ont trouvé le même résultat que sur $\mathbb{R}^n$. La fonction sera nulle presque partout si $(\alpha p')^{1/p'}(\beta q')^{1/q'} > (\sin \frac{\pi}{2}(q'-1))^{1/q'}$.

À leur tour, M.G. Cowling et J.F. Price, ont donné en 1983 une version $L^p - L^q$ du théorème de Hardy. Ils ont prouvé que si $1 \leq p, q \leq +\infty$ où l'un d'eux au moins est fini et si α, β sont deux réels positifs, et si la fonction mesurable f vérifie

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{p\alpha x^2}|f(x)|^p dx < +\infty$,

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{q\beta\xi^2}|\hat{f}(x)|^q d\xi < +\infty$,

alors $f = 0$ presque partout si $\alpha\beta \geq \frac{1}{4}$ et pour $\alpha\beta < \frac{1}{4}$, une infinité de fonctions linéairement indépendantes satisfaisant à ces hypothèses.

Un autre mathématiciens A. Miyachi a publié en 1997, sa propre généralisation du principe d'incertitude de Hardy, qui englobe aussi le théorème de Cowling-Price. L'énoncé de ce théorème est le suivant :

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie :

(i) $e^{\alpha x^2} f \in L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$,

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} Log^+(\frac{e^{\beta\xi^2}|\hat{f}(\xi)|}{c}) d\xi < +\infty$,

alors si $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, f est un multiple de la gaussienne $e^{-\alpha x^2}$.

Ce qui donne en fait que f est nulle presque partout si $\alpha\beta = \frac{1}{4}$ et que si $\alpha\beta < \frac{1}{4}$, il existe une infinité de fonctions linéairement indépendantes vérifiant les hypothèses du théorème.

Dans la deuxième partie de ma thèse je m'intéresse à la généralisation de tous ces résultats dans le cas du groupe G décrit précédemment.

Dans toutes les versions analogues que j'ai donné aux résultats précédents, la convergence de l'intégrale dans la deuxième condition se fait dans $L^1(\mathbb{R}^n/K, d\overline{\ell})$ où $d\overline{\ell}$ désigne l'image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ par la projection canonique $\ell \mapsto K \cdot \ell = \overline{\ell}$.
En effet, l'analogue du théorème de Miyachi sur le groupe G qu'on propose est énoncé comme suit :
Soient α et β deux réels positifs et f une fonction de carré intégrable sur G vérifiant les deux propriétés :

(i) $e^{\alpha\|\cdot\|^2} f \in L^1(G) + L^\infty(G)$,
(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n/K} Log^+ \left(\frac{e^{2\beta\|\ell\|^2} \sum_{\sigma\in\widehat{K_\ell}} \|\pi_{\ell,\sigma}(f)\|^2_{HS}}{C} \right) d\overline{\ell} < \infty$, où C est une constante positive.

Alors on obtient l'une des trois conclusions :

1. $f = 0$ presque partout si $\alpha\beta > 1/4$.
2. Si $\alpha\beta < 1/4$, alors il existe une infinité de fonctions linéairement indépendantes vérifiant les deux conditions *(i)* et *(ii)*.
3. Si $\alpha\beta = 1/4$, la fonction f est de la forme $f(k,x) = \lambda(k)e^{-\alpha\|x\|^2}$, où λ est une fonction de carré intégrable sur K.

Comme dans le cas classique, le théorème de Miyachi sur G admet comme conséquence une version analogue au théorème de Cowling-Price sur le groupe G :
Si α et β sont deux réels positifs, $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\min(p,q)$ est fini, et si f est une fonction de carré intégrable G satisfaisant aux conditions :

(i) $e^{\alpha\|\cdot\|^2} f \in L^p(G)$.
(ii) $\int_{\mathbb{R}^n/K} e^{q\beta\|\ell\|^2} \Big(\sum_{\sigma\in\widehat{K_\ell}} \|\pi_{\ell,\sigma}(f)\|^2_{HS} \Big)^{\frac{q}{2}} d\overline{\ell} < \infty$.

Alors on obtient l'une des conclusions :

1. $f = 0$ presque partout si $\alpha\beta \geq 1/4$.
2. Si $\alpha\beta < 1/4$, alors il existe une infinité de fonctions linéairement indépendantes vérifiant les conditions *(i)* et *(ii)*.

En se basant sur la version $L^p - L^q$ du théorème de Morgan donnée par Ben Farah

et Mokni, citée précédemment, on propose dans le cas des extensions compactes de $\mathbb{R}^n$ la généralisation suivante :
Soient $p' > 2$,et q' son conjugué. Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\min(p,q)$ est fini et soit f une fonction de carré intégrable sur G, satisfaisant :

(i) $e^{\alpha\|.\|^{p'}} f \in L^p(G)$,
(ii) $\int_{\mathbb{R}^n/K} e^{q\beta\|\ell\|^{q'}} \Big(\sum\limits_{\sigma\in\widehat{K_\ell}} \|\pi_{\ell,\sigma}(f)\|_{HS}^2 \Big)^{\frac{q}{2}} d\overline{\ell} < \infty$.

Alors f est nulle presque partout si $(\alpha p')^{\frac{1}{p'}}(\beta q')^{\frac{1}{q'}} > \sin(\frac{\pi}{2}(q'-1))^{\frac{1}{q'}}$. Sinon, lorsque $(\alpha p')^{\frac{1}{p'}}(\beta q')^{\frac{1}{q'}} \leq (\sin\frac{\pi}{2}(q'-1))^{\frac{1}{q'}}$, il existe une fonction f non nulle sur G réunissant les deux conditions ci dessus.

D'autres mathématiciens ont poursuivi la démarche de Hardy. C'est le cas de Beurling qui a généralisé le résultat de Hardy par son théorème, appelé théorème de Beurling à son honneur, qui prouve qu'il n'existe aucune fonction de carrée intégrable non nulle et vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\hat{f}(\xi)|e^{\|x\|\|\xi\|}dxd\xi < +\infty.$$

Ce dernier résultat a été généralisé par le théorème de Bonami, Demange et Jaming qui ont prouvé qu'une fonction f de carré intégrable sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{f}(y)||f(x)|}{(1+\|y\|+\|x\|)^N} e^{\|y\|\|x\|}dydx < \infty$$

est l'une des deux suivantes

1. $f = 0$ presque partout si $N \leq n$.
2. Lorsque $N > n$, la fonction f est de la forme $f(x) = P(x)e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$, où P est un polynôme sur $\mathbb{R}^n$ de degré $< \frac{N-n}{2}$.

Pour ce dernier résultat, je propose dans la quatrième partie de ma thèse, toujours dans le cas des extensions compactes de $\mathbb{R}^n$, la généralisation suivante :
Soit f de carré intégrable sur G vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_K\int_{\mathbb{R}^n/K} \frac{\sum\limits_{\sigma\in\widehat{K_\ell}} \|\pi_{\ell,\sigma}(f)\|_{HS}|f(k,x)|}{(1+\|\ell\|+\|x\|)^N} e^{\|\ell\|\|x\|}d\overline{\ell}d\nu(k)dx < \infty$$

Alors

1. $f = 0$ presque partout si $N \leq n$.

2. Lorsque $N > n$, la fonction f est de la forme $f(k,x) = P(k,x)e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$, où P est une fonction de carré intégable sur K et un polynôme de degré $< \frac{N-n}{2}$ sur $\mathbb{R}^n$.

Dans le même cadre se situe le théorème de Gelfand-Shilov :
Soient $\alpha,\ \beta > 0$ tels que $\alpha\beta \geq \frac{1}{4}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $N \in \mathbb{N}$.
Soit maintenant f une fonction de carré intégrable $\mathbb{R}^n$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\textit{(i)}\ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|e^{\frac{\alpha^p}{p}\|x\|^p}}{(1+\|x\|)^N} dx < \infty,$$

$$\textit{(ii)}\ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{f}(y)|\ e^{\frac{\beta^q}{q}\|y\|^q}}{(1+\|y\|)^N} dy < \infty.$$

Alors :
1. Si $p = q = 2$ et $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, alors $f(x) = P(x)e^{-\frac{\alpha^2}{2}\|x\|^2}$ où P est un polynôme sur $\mathbb{R}^n$ de degré inférieur à $N - n$.
2. Sinon $f = 0$ presque partout.

Encore dans la quatrième et dernière partie de ma thèse, je donne une version du théorème de Gelfand-Shilov sur le groupe G.
En gardant les mêmes hypothèses sur α, β, p, q et N, on prouve pour une fonction de carré intégrable sur G qu'on note f et qui satisfait aux deux conditions suivantes :

$$\textit{(i)}\ \int_{\mathbb{R}^n} \int_K \frac{|f(k,x)|e^{\frac{\alpha^p}{p}\|x\|^p}}{(1+\|x\|)^N} d\nu(k)dx < \infty\ .$$

$$\textit{(ii)}\ \int_{\mathbb{R}^n/K} \frac{\sum_{\sigma\in\widehat{K_\ell}} \|\pi_{\ell,\sigma}(f)\|_{HS}\ e^{\frac{\beta^q}{q}\|\ell\|^q}}{(1+\|\ell\|)^N} d\bar{\ell} < \infty.$$

que :
1. Si $p = q = 2$ et $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, alors $f(k,x) = P(k,x)e^{-\frac{\alpha^2}{2}\|x\|^2}$ où P est une fonction de carré intégable sur K et un polynôme sur $\mathbb{R}^n$ de degré inférieur à $N - n$.
2. Sinon $f = 0$ presque partout.