Name : Anis Messaoud.

Title : Fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf pour certains groupes de Lie à nil-radical co-compact.

Position : "Professeur Agrégé" at IPEIG "Institut prépératoire aux études d'ingénieurs de Gafsa".

Date of defense : March 15, 2018.

Referees : K. Tounsi (Sfax) and T. Wurzbacher (Metz, France).

Abstract : Les groupes de Lie s'introduissent naturellement dans de nombreuses questions de mathématiques pures et appliquées. Crée à l'origine au XIXe siècle par le mathématicien norvégien Sophus Lie, la théorie a été développée tout au long du XXe siècle en parallèle avec les progrès de l'algèbre, de la topologie et de la géométrie différentielle et aussi l'impulsion des recherches en physique et en mécanique théorique. elle englobe plusieurs théories comme : la mesure de Haar, la théorie du produit de composition, les séries de Fourier, les fonctions presque-périodiques, les groupes d'opérateurs unitaires et en partie la théorie de potentiel, la théorie ergodique et la topologie algébrique.

L'un des problèmes essentiels de l'analyse harmonique et plus précisément de la théorie des représentations des groupes de Lie est la détermination du dual unitaire $\widehat{G}$ d'un groupe de Lie G, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles et unitaires de G, l'une des idées importantes liées à la description de $\widehat{G}$ est d'établir une correspondance entre $\widehat{G}$ et l'espace $\mathfrak{g}^*/G$ des orbites co-adjointes de G, où $\mathfrak{g}^*$ désigne le dual de l'algèbre de Lie de G. Dans certains cas, la théorie de Mackey des représentations induites nous permet de décrire explicitement le dual unitaire de G. On désire si possible, donner pour chaque classe de telles représentations une réalisation concrète de l'une d'entre elles, en terme d'un objet géométrique lié au groupe. Une réponse complète à cette question a été apportée dans un premier lieu par A. A. Kirillov qui a établi par la méthode des orbites, dans le cadre des groupes nilpotents, une bijection naturelle entre l'espace des orbites $\mathfrak{g}^*/G$ de la représentation coadjointe du groupe G et son dual unitaire $\widehat{G}$ [12]. étant donnée une orbite de la représentation coadjointe de G, à toute polarisation invariante de cette orbite, Kirillov fait correspondre une réalisation de l'élément de $\widehat{G}$ correspondant à l'orbite. Cette méthode a été étendue par Bernat [4] pour les groupes

de Lie exponentiels résolubles, Auslander-Kostant [1] pour les groupes de Lie résolubles. Dans le cadre des groupes de Lie à nilradical co-compact, une version de la méthode des orbites due à Lipsman, associe une orbite coadjoint $\mathscr{O}_\xi \in \mathfrak{g}^*$, de certaine forme régulière ξ sur $\mathfrak{g}$ dite admissible, à chaque représentation unitaire irréductible. Il a prouvé dans [16] l'existence d'une bijection entre $\widehat{G}$ et un sous-espace $\mathfrak{g}^\ddagger/G$ de $\mathfrak{g}^*/G$, appelé espace des orbites co-adjointes admissibles.

Un autre axe de recherche assez important dans la théorie des représentations est celui de l'étude de la décomposition d'une représentation unitaire d'un groupe de Lie G en "somme" de représentations unitaires irréductibles. On suppose que H est un sous groupe fermé de G, on peut considérer deux contextes naturels pour la décomposition irréductible d'une représentation unitaire : l'une est une représentation induite d'un groupe plus petit (notée $Ind_H^G\sigma$ pour $\sigma \in \widehat{H}$) et l'autre est est la restriction d'un groupe plus grand (notée $\pi\big|_H$ pour $\pi \in \widehat{G}$). Les formules de décompositions correspondantes sont appelées respectivement formule de Plancherel et règle de branchement. Donc l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des représentations est la règle de branchement qui permet de décrire la décomposition de la restriction de π sur H en termes d'intégrale directe de représentations unitaires irréductibles de H :

$$\pi\big|_H \simeq \int_{\widehat{H}}^{\oplus} m(\pi,\tau)d\mu(\tau),$$

où μ est une mesure borélienne sur $\widehat{H}$ et $m(\pi,.) : \widehat{H} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ est une fonction mesurable appelée *fonction de multiplicité* [9]. Apporter une réponse au problème de branchement consiste à donner une description explicite de la mesure μ et de la fonction de multiplicité $m(\pi,.)$. Des réponses satisfaisantes ont été données à ce problème par Corwin-Greenleaf pour le cas nilpotent, Lipsman pour le cas complètement résoluble et par Fujiwara pour le cas résoluble exponentiel.

Soient G un groupe de Lie connexe, simplement connexe et H un sous groupe de G, on note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie respectivement et pr : $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ la projection canonique entre leurs espaces duaux. Pour $\pi \in \widehat{G}$ et $\tau \in \widehat{H}$, on note $\mathscr{O}_\pi \subset \mathfrak{g}^*$ et $\mathscr{O}_\tau \subset \mathfrak{h}^*$ respectivement les orbites coadjointes associées. L. Corwin et F. P. Grenleaf donnent une décomposition explicite en représentations irréductibles de la restriction $\pi\big|_H$, elle est donnée en termes de géométrie orbitale. Cette description utilise la méthode des orbites des

Kirillov qui donne une bijection entre le dual unitaire $\widehat{G}$ et l'ensemble des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*$. L. Corwin et F. P. Greenleaf montrent dans [8] que τ apparait dans l'intégrale $\pi\big|_H$ si $\mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}_\tau)$ rencontre $\mathscr{O}_\pi$, ceci prouve que la multiplicité de τ dans $\pi\big|_H$ est déterminée géométriquement en termes d'intersection d'orbites coadjointes, elle est déterminée en comptant le nombre des H-orbites dans $\mathscr{O}_\pi \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}_\tau)$: c'est *la fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf* notée $n(\mathscr{O}_\pi, \mathscr{O}_\tau)$. Dans cet esprit on s'attend à ce que cette fonction $n(\mathscr{O}_\pi, \mathscr{O}_\tau)$ coïncide avec la multiplicité d'une représentation unitaire irréductible τ de H se produisant dans la décomposition intégrale directe (règle de branchement) de la restriction $\pi\big|_H$. La recherche dans cette direction a été étendue pour les groupes de Lie nilpotents et certains groupes résolubles, par Kirillov, Corwin, Greenleaf, Lipsman et Fujiwara [8, 10, 11, 12], T. Kobayashi, B. Orsted et S. Nasrin pour les groupes de Lie semi-simples [14, 15]. Cependant, très peu d'attention a été accordée jusqu'à présent sur la fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf pour les groupes de Lie à nilradical co-compact.

Les deux premières parties de ma thèse sont une contribution à l'étude de cette fonction au cadre des groupes de Lie à nilradical co-compact. J'ai essayé, en collaboration avec M. Ben Halima, de traiter le cas des produits semi-direct $G = K \ltimes \mathbb{N}$ de groupes compacts K et nilpotents $\mathbb{N}$. L'espace dual de ces groupes a été déterminé à l'aide de la théorie des petits groupes de Mackey et de la théorie des orbites de Kirillov par R. L. Lipsmann. Le problème auquel nous nous étions consacrés fût de comparer la fonction de multiplicité $m(\pi, \tau)$ pour $\pi \in \widehat{G}$ et $\tau \in \widehat{K}$ à celle de Corwin-Greenleaf $n(\mathscr{O}_\pi, \mathscr{O}_\tau)$. La première partie est consacré aux extensions compactes de $\mathbb{R}^n$, soit $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$ le produit semi-direct de groupe K et $\mathbb{R}^n$, où K est un sous groupe fermé de $O(n)$. Rappelons que la multiplication dans ce groupe est donnée par

$$(A, x)(B, y) := (AB, x + Ay), \;\; A, B \in K, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Notons par $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}^n$ l'algèbre de Lie de G. En appliquant encore une fois la théorie des petits groupes de Mackey, nous concluons que chaque représentation unitaire irréductible de dimension infinie de G est déterminée par une paire (μ, u), où

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

avec $r > 0$ et μ est le plus haut poids d'une représentation unitaire irréductible de $H := K_u$, le stabilisateur de u dans K. D'autre part, chaque représentation unitaire irréductible de dimension finie de G est obtenue par extension triviale d'une représentation unitaire irréductible de K. Soit χ_u le caractère unitaire de $\mathbb{R}^n$ donné par $\chi_u(v) = e^{iu^t v}$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et soit $\sigma_\nu \in \widehat{K_u}$ de plus haut poids ν, on définit $\sigma_\nu \otimes \chi_u \in \widehat{K_u \ltimes \mathbb{R}^n}$ par

$$(\sigma_\nu \otimes \chi_u)(A, a) = e^{iu^t a}\sigma(A), \quad A \in K_u, \ a \in \mathbb{R}^n$$

et on désigne par $\pi_{(\nu,u)}$ la représentation induite donnée par

$$\pi_{(\nu,u)} := Ind_{K_u \ltimes \mathbb{R}^n}^G(\sigma_\nu \otimes \chi_u)$$

c'est une représentation unitaire irréductible de G on l'associe l'orbite coadjointe admissible $\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}$. Soit $\tau_\lambda \in \widehat{K}$ de plus haut poids λ, on note $\mathscr{O}^K_\lambda$ l'orbite coadjointe admissible de K associée à cette représentation. La multiplicité de τ_λ dans la restriction de $\pi_{(\sigma,\chi_u)}$ sur K est notée $m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda)$. Nous avons prouvé les deux résultats suivants :

Théorème 0.0.1. *([2]) On a*

$$m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda) \neq 0.$$

Théorème 0.0.2. *([2]) Soit $(K, H) = (SO(n), SO(n-1))$ avec $n \geq 3$. On suppose que ν et λ sont des poids fortement dominants de H et K, respectivement. Alors*

$$n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda) \leq 1$$

et donc, $m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) = n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda)$.

Dans le même contexte, nous avons aussi considéré le cas de produit semi-direct $G = K \ltimes \mathbb{H}_n$, où K est un sous groupe fermé de $U(n)$ et $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ est le groupe de Heisenberg standard de dimension $2n+1$. Il est clair que G est un sous-groupe de $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$, qu'on appelle souvent le groupe des déplacement de Heisenberg. La méthode des orbites mise au point par Lipsman [16] dans le cadre des groupes de Lie à nilradical co-compact établit une bijection entre le dual unitaire de G_n et son espace des orbites co-adjointes admissibles.

Pour $z = (z_1, \ldots, z_n)$ et $w = (w_1 \ldots, w_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$, on désigne par $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$ définit par

$$\langle z.w \rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}.$$

Rappelons que la multiplication dans le groupe de Heisenberg est donnée par

$$(z,t)(z',t') = \Big(z + z', t + t' - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z, z'\rangle\Big), \;\; z, z' \in \mathbb{C}^n, \;\; t, t' \in \mathbb{R},$$

où $\operatorname{Im}(z)$ est la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$. Le groupe K agit naturellement par automorphismes sur $\mathbb{H}_n$ comme suit

$$k \cdot (z,t) := (kz, t),$$

où $k \in K$ et $(z,t) \in \mathbb{H}_n$. La loi de groupe dans G est donnée par

$$(k, z, t) \cdot (k', z', t') = \Big(kk', z + kz', t + t' - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z, kz'\rangle\Big),$$

$k, k' \in K$ et $(z,t), (z',t') \in \mathbb{H}_n$. Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{h}_n$ l'algèbre de Lie de G, tout élément de ν dans $\mathfrak{g}^* = (\mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{h}_n)^*$ peut être identifier par un élément $(U, u, x) \in \mathfrak{k} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ tel que

$$\langle (U, u, x), (B, w, s) \rangle = \operatorname{tr}(UB) + \operatorname{Im}\langle u, w\rangle + xs,$$

où $(B, w, s) \in \mathfrak{g}$. L'orbite coadjointe de G passant par le point $(U, 0, x)$ est dite générique et notée par $\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}$. Nous avons prouvé le résultat suivant :

Théorème 0.0.3. *([3]) Si $(K, \mathbb{H}_n)$ est une paire de Gelfand et U est un élément central de $\mathfrak{k}$, alors*

$$n\big(\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}, \mathscr{O}^K_X\big) \leq 1$$

pour toute orbite coadjointe $\mathscr{O}^K_X$ dans $\mathfrak{k}^*$.

Pour $K = U(n)$, $G = U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$ est le groupe de déplacement de Heisenberg. La description de dual unitaire $\widehat{G}$ de G est basée aussi sur la théorie des petits groupes de

Mackey . Les représentations irréductibles de dimension infinie de $\mathbb{H}_n$ sont paramétrées par $\mathbb{R}^*$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on note σ_α une représentation irréductible de $\mathbb{H}_n$ et $\mathscr{F}_\alpha(n)$ l'espace de Fock déterminé par

$$\mathscr{F}_\alpha(n) = \Big\{ f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe} \mid \int_{\mathbb{C}^n} |f(w)|^2 e^{-\frac{|\alpha|}{2}|w|^2} dw < \infty \Big\}$$

, la représentation σ_α peut être réaliser sur $\mathscr{F}_\alpha(n)$ par

$$\sigma_\alpha(z,t) f(w) = e^{i\alpha t - \frac{\alpha}{4}|z|^2 - \frac{\alpha}{2}\langle w,z\rangle} f(w+z)$$

pour $\alpha > 0$ et

$$\sigma_\alpha(z,t) f(\overline{w}) = e^{i\alpha t + \frac{\alpha}{4}|z|^2 + \frac{\alpha}{2}\langle \overline{w},\overline{z}\rangle} f(\overline{w}+\overline{z})$$

pour $\alpha < 0$ où $z \in \mathbb{C}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour $A \in U(n)$, on définie sur $\mathscr{F}_\alpha(n)$ l'opérateur d'entrelacement $W_\alpha(A)$ par

$$W_\alpha(A) f(w) = f(A^{-1}w).$$

Les poids dominants de $U(n)$ sont paramétrés par des séquences $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 ... \geq \lambda_n$. On note $(\tau_\lambda, \mathscr{H}_\lambda)$ une représentation unitaire irréductible de K de plus haut poids λ où $\mathscr{H}_\lambda$ est espace de Hilbert de τ_λ, donc d'après Mackey [11], pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$\pi_{(\lambda,\alpha)}(A,z,t) := \tau_\lambda(A) \otimes \sigma_\alpha(z,t) \circ W_\alpha(A), \;\; (A,z,t) \in G,$$

est une représentation unitaire irréductible de G réaliser sur l'espace $\mathscr{H}_\lambda \otimes \mathscr{F}_\alpha(n)$, cette représentation $\pi_{(\lambda,\alpha)}$ est dite générique. Nous avons prouvé les résultats suivants :

Théorème 0.0.4. *([3]) On a*

$$m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq 0 \Rightarrow n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0.$$

Théorème 0.0.5. *([3]) Soit $n \geq 2$. On suppose que λ est un poids fortement dominant de $K = U(n)$. Alors pour tout poids dominant μ de K tel que $B_{\lambda,\mu}$ est inversible on a*

$$n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \leq 1.$$

La matrice $B_{\lambda,\mu}$ est définie dans le chapitre 3, section 4.3.

Théorème 0.0.6. *([3]) Soit $n \geq 2$. Si le poids dominant $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de K satisfait $\lambda_1 = ... = \lambda_n = a$ pour un certain $a \in \mathbb{Z}$, alors pour tout poids dominant μ de K avec $\mu \neq \lambda$ on a*

$$n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \leq 1;$$

De plus $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ si et seulement si μ est de la forme

Cas 1 : *si $\alpha > 0$ alors $\mu = (\underbrace{b, ..., b}_{p}, \underbrace{a, ..., a}_{q}) \in \mathbb{Z}^n$, $p + q = n$, $b \in \mathbb{Z}$ avec $b > a$.*

Cas 2 : *si $\alpha < 0$ alors $\mu = (\underbrace{a, ..., a}_{p}, \underbrace{b, ..., b}_{q}) \in \mathbb{Z}^n$, $p + q = n$, $b \in \mathbb{Z}$ avec $a > b$.*

Par conséquent, si $\mu_{n-1} \neq a$ et $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ alors $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu)$.

Une conséquence des théorèmes (0.0.4. et 0.0.5.) est que la fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu)$ coïncide avec $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu)$, la multiplicité de τ_μ dans la restriction de $\pi_{(\lambda,\alpha)}\big|_{U(n)}$, pour μ un poids dominant particulier de $U(n)$ [3].

Dans le dernier chapitre on désire étudier le produit semi-direct $G = K \ltimes \mathbb{F}_{n,2}$ où K est un sous groupe fermé connexe de $O(n)$ et $\mathbb{F}_{n,2}$ est le groupe de Lie libre de pas 2. Soit $\mathfrak{f}_{n,2} = \mathbb{R}^n \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ l'algèbre de Lie de $\mathbb{F}_{n,2}$, on identifie le sous espace $\mathfrak{z} = \bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ de $\mathfrak{f}_{n,2}$ avec l'espace vectoriel réel des matrices carrés $n \times n$ antisymétriques $\mathfrak{so}(n)$. Donc, pour $u, v \in \mathbb{R}^n$ on associe à $u \wedge v$ la matrice $M_{u,v}$ de $\mathfrak{so}(n)$ définie par $M_{u,v} = vu^t - uv^t$.
En termes de coordonnées exponentiels, la multiplication dans le groupe $\mathbb{F}_{n,2}$ est donnée par

$$(u, \xi) \cdot (v, \eta) = (u + v, \xi + \eta + \frac{1}{2} u \wedge v).$$

Le groupe K agit sur $\mathbb{F}_{n,2}$ par automorphisme comme suit

$$k \cdot (u, A) = (ku, kAk^t), \text{ où } k \in K, \, (u, A) \in \mathbb{F}_{n,2}.$$

On identifie $\mathbb{F}_{n,2}$ avec son algèbre de Lie $\mathfrak{f}_{n,2}$ par l'application exponentiel, donc la loi de groupe dans G est donnée par

$$(k_1, X_1) \cdot (k_2, X_2) = (k_1 k_2, X_1(k_1 \cdot X_2)), \; k_1, k_2 \in K, \; X_1, X_2 \in \mathfrak{f}_{n,2}.$$

Plan de la thèse : Cette thèse est organisée comme suit :

1. Le premier chapitre a pour but principal de rappeler quelques généralités concernant les groupes de Lie localement compacts et compacts et leurs représentations, ainsi que la méthode des orbites de Lipsman pour les groupes de Lie à nilradical co-compact.
2. Les chapitres 2 et 3 sont deux articles basés sur les résultats que nous avons cités ci-dessus concernant respectivement les extensions compactes de $\mathbb{R}^n$ et de groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_n$.
3. Le quatrième chapitre est un projet d'article consacré aussi à l'étude de la fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf pour les extensions compactes de groupe de Lie libre de pas 2 $\mathbb{F}_{n,2}$.