Name : Fatma Abdelmoula.

Title : Quelques principes d'incertitude sur les groupes de Lie nilpotents et C^*-algèbres.

Position : "Assistant Professor" at FSS "Faculty of Sciences of Sfax".

Date of defense : September 24, 2012.

Referees : N. Ben Salem (Tunis) and C. Molitor-Braun (Luxembourg).

Abstract : La théorie des groupes de Lie, fondée dans la période de 1870-1880 par le mathématicien norvégien Sophus Lie, a d'abord été considérée comme une partie assez marginale des mathématiques, liée à des problèmes touchant les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles et la géométrie différentielle. L'étude de ces problèmes a mis plus tard en évidence un certain nombre d'objets mathématiques particuliers, explicitement définis, comme les groupes topologiques, dont on a peu à peu découvert le rôle fondamental dans presque toutes les parties des mathématiques modernes, même les plus éloignées en apparence des vues initiales de Lie. En outre, ces groupes semblent intervenir de façon de plus en plus profonde dans les conceptions récentes de la physique théorique, surtout en théorie de la relativité et en mécanique quantique.

En relation directe, parmi les problèmes étudiés en analyse harmonique non-commuta tive, on peut citer l'étude de certains principes d'incertitude et la caractérisation des C^*-algèbres de certains groupes de Lie.

Les principes d'incertitudes sont des problèmes largement étudiés sur la droite réelle et dans le cadre des groupes de Lie nilpotents connexes et simplement connexes. Ils discutent le fait qu'une fonction intégrable ne peut jamais être finement localisée ainsi que sa transformée de Fourier. Ce résultat a été constaté depuis les années trentes avec la découverte de Hardy dans le cas où le groupe de base est $\mathbb{R}$. Il a démontré que si f est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $|f(x)| \leq Ce^{-a\pi\|x\|^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $|\widehat{f}(\xi)| \leq Ce^{-b\pi\|\xi\|^2}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

avec a, b et C sont des constantes positives, alors $f = 0$ presque partout si $ab > 1$. Il existe une infinité de fonctions linéairement indépendantes satisfaisants (i) et (ii) si $ab < 1$ et $f(x) = ke^{-a\pi\|x\|^2}$ si $ab = 1$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$.

Un deuxième résultat de la même époque, est celui de Morgan qui montre que si f est

une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ et $\alpha > 2$ et β son conjugué ; alors les conditions :

(*i*) $|f(x)| \leq Ce^{-a\pi\|x\|^\alpha}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(*ii*) $|\widehat{f}(\xi)| \leq Ce^{-b\pi\|\xi\|^\beta}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

avec a, b et C sont des constantes positives impliquent que $f = 0$ presque partout si

$$(a\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(b\beta)^{\frac{1}{\beta}} > 2(\sin\frac{\pi}{2}(\beta-1))^{\frac{1}{\beta}}. \tag{1}$$

En outre, il existe une infinité de fonctions linéairement indépendantes satisfaisant ces deux conditions si

$$(a\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(b\beta)^{\frac{1}{\beta}} \leq 2(\sin\frac{\pi}{2}(\beta-1))^{\frac{1}{\beta}}. \tag{2}$$

En 1983, une version $L^p - L^q$ du théorème de Hardy a été prouvée par M. G. Cowling et J. F. Price. Ils ont démontré que si $1 \leq p, q \leq +\infty$ tel que $\min(p,q) < +\infty$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ telle que :

(*i*) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{pa\pi x^2}|f(x)|^p dx < +\infty$,

(*ii*) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{qb\pi\xi^2}|\widehat{f}(\xi)|^q d\xi < +\infty$,

alors, $f = 0$ presque partout si $ab \geq 1$ et il existe une infinité de fonctions linéairement indépendantes vérifiants (*i*) et (*ii*) si $ab < 1$.

En 2003, Ben Farah et Mokni ont pu étendre le théorème de Morgan sur la droite réelle en une version $L^p - L^q$ tout en énonçant le résultat suivant :
Soient $\alpha > 2$ et β son conjugué, $1 \leq p, q \leq +\infty$ et a et b deux constantes positives. Supposons que f est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ telle que :

(*i*) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{pa\pi|x|^\alpha}|f(x)|^p dx < +\infty$,

(*ii*) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{qb\pi|\xi|^\beta}|\widehat{f}(\xi)|^q d\xi < +\infty$.

Alors, $f = 0$ presque partout sous la condition (1) et il existe une infinité de fonctions linéairement indépendantes satisfaisants ces deux conditions si (2) est vérifiée.

Ces résultats liés aux principes d'incertitude sur $\mathbb{R}$, ont intéressé beaucoup de mathématiciens. Depuis une dizaine d'années, plusieurs théorèmes analogues aux théorèmes de Hardy, de Cowling-Price et de Morgan, sont établis sur certains groupes de Lie et pour certaines transformations fonctionnelles. Tous ces travaux sont le point de départ de mes pensées qui consistent à généraliser ces principes dans le cadre des groupes de Lie nilpotents connexes pas nécessairement simplement connexes à centre non-compact. La première partie consiste à prouver une version $L^p - L^q$ du théorème de Morgan sur les groupes de Lie résolubles exponentiels et en particulier sur les groupes de Lie nilpotents connexes à centre non-compact. Ce travail fait l'objet de ma première publication nommée :

"The $L^p - L^q$ Analogue of Morgan's Theorem on Exponential Solvable Lie Groups."

Partons donc d'un tel groupe G à centre non-compact et notons $\widetilde{G}$ son revêtement universel. Ainsi, $\widetilde{G}$ est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe tel que l'application $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow \widetilde{G}$ est un difféomorphisme avec $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(\widetilde{G})$. Dans cette situation, tout élément de G s'écrit comme un triplet (z, t, y) ; avec $z \in \mathbb{T}^d,\ t \in \mathbb{R}$ et $y \in Y$ où Y est une section de Borel des éléments de $G/(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R})$ et $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R} \subset Z(G)$, le centre de G. Soient alors $2 \leq p, q \leq +\infty$, $a,\ b \in \mathbb{R}_+^*$ et α, β deux nombres conjugués avec $\alpha \geq 2$. Supposons que $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction mesurable telle que :

(i) $\displaystyle\int_G e^{pa\pi\|(x,y)\|^\alpha} |f(x, z, y)|^p dxdzdy < +\infty,$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathscr{X}} e^{qb\pi\|\xi\|^\beta} \|\pi_\xi(f)\|_{H.S}^q |Pf(\xi)| d\xi < +\infty,$

où $\mathscr{X}$ est la section de croisement adéquate. Alors, $f = 0$ presque partout si la condition (1) est satisfaite.

Ce théorème généralise le théorème de Morgan démontré par Ali Baklouti, Nour Ben Salah et Kaïs Smaoui sur un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe G_1 tout en trouvant la condition optimale. Ils ont démontré alors le résultat suivant :

Soit $f : G_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que :

(i) $|f(x)| \leq Ce^{-a\pi\|x\|^\alpha}$, pour tout $x \in G_1$,

(ii) $\|\pi_\xi(f)\|_{H.S} \leq Ce^{-b\pi\|\xi\|^\beta}$, pour tout $\xi \in \mathscr{W}$,

où $\mathscr{W}$ est une section de croisement des orbites coadjointes des formes linéaires génériques. Alors, $f = 0$ presque partout si

$$(a\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} (b\beta)^{\frac{1}{\beta}} > 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}} (\sin \frac{\pi}{2}(\beta - 1))^{\frac{1}{\beta}}.$$

Restons toujours dans le même cadre de groupe, un autre principe abordé dans cette thèse est celui de la variation du théorème de Miyachi. Cette extension est basée sur un travail fait, en 2009, par A. Baklouti et S. Thangavelu. Ils ont donné une nouvelle version de ce théorème sur un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe G_1, tels que si a, b et c sont des constantes positives et $f : G_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que :

(i) $e^{a\pi\|\cdot\|^2} f \in L^1(G_1) \cap L^2(G_1) + L^\infty(G_1)$,

(ii) $\displaystyle\int_{\mathscr{W}} e^{2b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_\xi(f)\|^2_{H.S} \log^+\left(\frac{e^{b\pi\|\xi\|^2}\|\pi_\xi(f)\|_{H.S}|Pf(\xi)|^{\frac{1}{2}}}{c}\right)|Pf(\xi)|d\xi < +\infty$.

Alors $f = 0$ presque partout si $ab > 1$ et $f(t,y) = f(0,y)e^{-a\pi t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, si $ab = 1$. En collaboration avec le Professeur Ali Baklouti, on a pu généraliser ce principe dans le cadre d'un groupe de Lie nilpotent connexe à centre non-compact. On a montré le théorème suivant :

Soient a, b et c des constantes positives et $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que :

(i) $e^{a\pi\|\cdot\|^2} f \in L^1(G) \cap L^2(G) + L^\infty(G)$,

(ii) $\displaystyle\int_{\mathscr{X}} e^{2b\pi\|\xi\|^2} \|\pi_\xi(f)\|^2_{H.S} \log^+\left(\frac{e^{b\pi\|\xi\|^2}\|\pi_\xi(f)\|_{H.S}|Pf(\xi)|^{\frac{1}{2}}}{c}\right)|Pf(\xi)|d\xi < +\infty$.

Alors $f = 0$ presque partout si $ab > 1$ et $f(t,y) = f(0,y)e^{-a\pi t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ et $y \in Y$, si $ab = 1$.

Cette thèse est organisée de la façon suivante :

- Le premier chapitre comporte deux parties. La première partie englobe des généralités et quelques notions de base sur la théorie des représentations des groupes de Lie tout en décrivant la paramétrisation des orbites sous une action unipotente d'un groupe de Lie connexe. On y rappelle aussi la formule de Plancherel dans le cadre d'un groupe de Lie nilpotent connexe dont la partie centrale compacte est de dimension un et on s'intéresse à donner une version stratifiée de cette formule. Dans la deuxième partie, on donne quelques généralités qui sont utiles pour la détermination de la C^*-algèbre du groupe de déplacement $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.
- Le deuxième chapitre est consacré à la preuve du premier résultat de cette thèse, à savoir la validité de la version $L^p - L^q$ du théorème de Morgan sur les groupes de Lie nilpotents connexes à centre non-compact. Le principe de la démonstration est de ramener l'étude du problème à une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant à son tour deux propriétés équivalentes.
- Dans le troisième chapitre, on présente, sous forme de projet, la validité du principe de Miyachi dans le cas d'un groupe de Lie nilpotent connexe à centre non-compact.
- Le quatrième chapitre est le sujet d'un travail fait en collaboration avec M. Elloumi et J. Ludwig et accepté pour publication dans "Bulletin des Sciences Mathématiques", intitulé

  "The C^*-algebra of the motion group $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$."

  On s'intéresse dans ce travail à la caractérisation de la C^*-algèbre du groupe de déplacement $M_n = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. Récemment, J. Ludwig et L. Turowska ont décrit la C^*-algèbre du groupe de Heisenberg H_n pour $n \geq 1$ et celle du groupe filiforme G_N pour $N \geq 3$. Cette description est faite au sens d'algèbre des champs d'opérateurs définis sur leurs espaces duaux. En se reportant au livre de J. Dixmier sur les C^*-algèbres, on a réussi à donner une description similaire de la C^*-algèbre du groupe M_n. L'espace dual de M_n, noté $\widehat{M_n}$, a été déterminé à l'aide de la théorie des petits groupes de Mackey et de la théorie des orbites de Kirillov par R. L. Lipsman. Ainsi, l'espace dual $\widehat{M_n} = \widehat{SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n}$ est en bijection avec l'espace des paramètres

$$\mathscr{P}_n := K_n \bigcup \widehat{SO(n)}, \text{ où } K_n = \widehat{SO(n-1)} \times \mathbb{R}_+^\star.$$

Soit $\ell^\infty(\widehat{M_n})$ la C^*-algèbre formée par les champs d'opérateurs $F : \widehat{M_n} \to \bigcup_{\pi \in \widehat{M_n}} \mathscr{B}(\mathscr{H}_\pi)$ tels que pour tout $\pi \in \widehat{M_n}$, $F(\pi) \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\pi)$ et $\|F\|_\infty := \sup_{\pi \in \widehat{M_n}} \|F(\pi)\|_{op} < \infty$.
Alors, $C^*(M_n)$ est identifiée avec une sous-algèbre de $\ell^\infty(\widehat{M_n})$ à travers la transformée de Fourier définie par

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : C^*(M_n) &\longrightarrow \ell^\infty(\widehat{M_n}) \\ c &\longmapsto \mathscr{F}(c), \end{aligned}$$

avec $\mathscr{F}(c)(\pi) = \pi(c)$ pour tout $\pi \in \widehat{M_n}$. Il est clair que $\mathscr{F}$ est un homomorphisme injectif de $C^\star(M_n)$ dans $\ell^\infty(\widehat{M_n})$.
Soit $\mathfrak{D}_n$ la famille des champs d'opérateurs F de $\ell^\infty(\widehat{M_n})$ tels que les champs $(F = F(\mu, r))_{(\mu,r) \in K_n}$ et $(F = F(\lambda))_{\lambda \in \widehat{SO(n)}}$ vérifient :

1. $F(\mu, r)$ est un opérateur compact dans $\mathscr{H}_{(\mu,r)}$, $(\mu, r) \in K_n$,
2. $F(\mu, 0) = \bigoplus_{\lambda \geq \mu} F(\lambda)$ est un opérateur compact dans $\mathscr{H}_{(\mu,0)}$ pour tout $\mu \in \widehat{SO(n-1)}$,
3. l'application $K_n \longrightarrow \bigcup_{(\mu,r) \in K_n} \mathscr{B}(\mathscr{H}_{(\mu,r)}) : (\mu, r) \longmapsto F(\mu, r)$ est continue en norme,
4. $\lim_{\|(\mu,r)\| \to +\infty} \|F(\mu, r)\|_{op} = 0$,
5. $\lim_{r \to 0} \|F(\mu, r) - F(\mu, 0)\|_{op} = 0$,
6. $\lim_{|\lambda| \to +\infty} \|F(\lambda)\|_{op} = 0$.

Il en résulte que $\mathscr{F}(C^\star(M_n)) \subset \mathfrak{D}_n$. Appliquant maintenant le théorème de Stone-Weierstrass $C^\star(M_n)$ est isomorphe à la sous-algèbre $\mathscr{D}_n$ de $\ell^\infty(\widehat{M_n})$ telle que

$$\mathscr{D}_n = \mathscr{F}\left(C^\star(M_n)\right).$$