Name : Hatem Hamrouni.
Title : Étude de certaines représentations unitaires d'un groupe de Lie résoluble exponentiel.
Position : Professor at "Faculty of Sciences of Sfax".
Date of defense : September 25, 2003.
Referees : Mabrouk Ben Ammar (Sfax) and Hidénori Fujiwara (Japan).
Abstract : La théorie des représentations induites des groupes localement compacts séparables a été fondée en 1949 par George W. Mackey. Ce dernier a donné une définition générale d'une représentation unitaire d'un groupe localement compact séparable G induite par une représentation unitaire σ d'un sous-groupe fermé H qu'on note

$$\tau(G, H, \sigma) = \tau(\sigma) = \mathrm{Ind}_H^G \sigma.$$

Cette définition généralise la notion des représentations induites des groupes finis qui a été fondée par Frobenius en 1899.

Dans son travail [79], Takenouchi a démontré en 1957 que toute représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie résoluble exponentiel $G = \exp \mathfrak{g}$ c'est à dire un groupe de Lie tel que l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G, est induite par une représentation de dimension 1. Ce que nous appelons dans la suite des représentations monomiales. En 1962, A. A. Kirillov a construit une bijection de l'espace des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*/G$ d'un groupe de Lie nilpotent G sur le dual unitaire $\hat{G}$ de G. Plus précisement, si f est un point du dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$, il existe des sous-algèbres $\mathfrak{b}$ totalement isotropes maximaux pour la forme bilinéaire alternée B_f sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$. La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ s'appelle polarisation réelle en f. La représentation monomiale $\tau(G, B, \chi_f) = \tau(G, B, f)$ de G est irréductible. De plus, la classe d'équivalence de $\tau(G, B, f)$ ne dépend que de l'orbite coadjointe $G \cdot f$ de f. Plus tard, en 1965, P. Bernat a pu étendre la bijection de Kirillov $\Theta_G : \mathfrak{g}^*/G \longrightarrow \hat{G}$ dans le cas des groupes de Lie résolubles exponentiels. En 1967, L. Pukanszky avait introduit ce que nous appelons la condition de Pukanszky dans le cas d'une polarisation réelle dans une algèbre de Lie résoluble exponentielle qui donne une condition nécessaire et suffisante d'irréductibilité pour une représentation monomiale.

Il était naturel, aprés la détermination explicite du dual unitaire $\hat{G}$ d'un groupe de Lie résoluble exponentiel de donner la décomposition en irréductibles d'une représentation induite $\tau(G, H, \sigma)$. Cette question a pris beaucoup d'importance durant les dernières années.
Dans [81], Michèle Vergne a prouvé que si $G = \exp \mathfrak{g}$ est un groupe de Lie résoluble exponentiel et si $\mathfrak{h}$ est une polarisation en $f \in \mathfrak{g}^*$, alors la représentation $\tau(G, H = \exp \mathfrak{h}, f)$ est somme finie de représentations irréductibles et a déterminé la décomposition de $\tau(G, H, f)$. Plus précisement, si on désigne par $U(f, \mathfrak{h})$ l'ensemble des orbites $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$ qui rencontre $f + \mathfrak{h}^\perp$ ($\mathfrak{h}^\perp$ désignant l'annihilateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^*$) suivant un ouvert non vide de $f + \mathfrak{h}^\perp$ et si Ω est une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$, on notera $c(\Omega, f, \mathfrak{h})$ le nombre de composantes connexes de $\Omega \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, alors on a le théorème suivant :

Théorème. 1. $U(f, \mathfrak{h})$ *est un ensemble fini ;*
2. *si* $\Omega \in U(f, \mathfrak{h})$*,* $c(\Omega, f, \mathfrak{h})$ *est un nombre fini ;*
3. $\tau(G, H, f) \simeq \sum_{\Omega \in U(f, \mathfrak{h})} c(\Omega, f, \mathfrak{h}) \pi_\Omega$.

Cette question est entièrement résolue par Lawrence Corwin, Frederick P. Greenleaf, Gérard Grélaud (Jean Ludwig et Ali Baklouti pour une désintégration concrète) dans le cas nilpotent, par Ronald Lipsman pour les groupes de Lie complètement résolubles. Enfin, Hide-

nori Fujiwara a donné en 1990 ([37]), une réponse générale pour les groupes de Lie résolubles exponentiels. Plus précisement, il a prouvé que la désintégration ou la décomposition en une intégrale direct d'irréductibles de $\tau(G, H, \sigma)$ s'obtient comme suit

$$\tau(G, H, \sigma) \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu(\pi), \tag{1}$$

avec $m(\pi)$ est le nombre des H-orbites contenues dans $p^{-1}(\Omega_\sigma^H) \cap \Omega_\pi$ (p étant la projection canonique de $\mathfrak{g}^*$ sur l'espace $\mathfrak{h}^*$, Ω_π l'orbite coadjointe associée à π et Ω_σ^H l'orbite coadjointe associée à σ) et μ une certaine mesure sur $\hat{G}$, décrite comme suit : on définit tout d'abord la mesure naturelle sur $p^{-1}(\Omega_\sigma^H)$ comme la mesure produit de la mesure canonique sur Ω_σ^H et la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}^\perp$, ensuite on prend son image dans $\hat{G}$ par l'application $p^{-1}(\Omega_\sigma^H) \longrightarrow G \cdot p^{-1}(\Omega_\sigma^H)/G \longrightarrow \hat{G}$. On obtient ainsi, la mesure de la désintégration μ.

L'un des problèmes les plus importants dans la théorie de la désintégration des représentations des groupes de Lie est de connaître explicitement un opérateur qui entrelace $\tau(G, H, \sigma)$ et sa décomposition en représentations irréductibles. La réponse à cette question peut aider à trouver la solution de plusieurs problèmes importants, par exemple l'étude de la résolubilité des opérateurs différentiels invariants sur l'espace homogène G/H, ou encore le problème de la réciprocité de Frobénius des vecteurs généralisés semi-invariants dont H. Fujiwara a récemment trouvé une solution. Pour les représentations induites, le problème est résolu par A. Baklouti et Jean Ludwig dans le cas nilpotent ([3]), ensuite par A. Baklouti dans le cas des groupes de Lie résolubles exponentiels et pour des sous-groupes normaux ([5]).

Un autre problème important de la théorie des représentations induites est l'étude de la fonction multiplicité $m(\pi)$ qui apparait dans la décomposition (1) de $\tau(G, H, \sigma)$. Plus précisement, il s'agit de prouver si nous avons les propriétés suivantes :

1. La fonction multiplicité est uniformément infinie ou uniformément finie.

2. Une condition nécessaire et suffisante pour la finitude des multiplicités est que pour presque tout $\pi = \pi_\phi$ dans le spectre de $\tau(G, H, \sigma)$, nous ayons

$$\dim G \cdot \phi - 2 \dim H \cdot \phi + \dim \Omega_\sigma^H = 0.$$

3. Dans le cas de finitude, la fonction de multiplicités est bornée.

En 1984, Yves Benoist a prouvé que si la paire (G, H) définie un espace symétrique exponentiel, la representation $\tau(G, H, 1)$ est sans multiplicités ([12]). En se basant sur la théorie de la géométrie algébrique et le fait que si la multiplicité $m(\pi)$ est finie alors elle coïncide avec le nombre de composantes connexes de la variété $p^{-1}(\Omega_\sigma^H) \cap \Omega_\pi$, L. Corwin, F. P. Greenleaf, G. Grélaud ([26, 23]) et R. Lipsman ([55]) ont démontré que les trois propriétés sont vraies pour les groupes de Lie nilpotents. Ensuite, dans [58], Lipsman les a établi pour les groupes de Lie complètement résolubles, en suivant exactement le même raisonnement fait dans le cas nilpotent. Pour cela, le dernier auteur a introduit tout d'abord la notion des ensembles pseudo-algébriques, généralisant ainsi la notion des ensembles algébriques, ensuite il a prouvé qu'un tel ensemble a un nombre fini de composantes connexes. D'autre part, il est bien connu d'aprés S. R. Quint ([77]) et G. Grélaud ([45]) que si la représentation monomiale $\tau(G, H, f)$ est induite à partir d'un sous-groupe normal H d'un groupe de Lie résoluble exponentiel G, alors sa fonction de multiplicités vérifie les trois assertions décrites plus haut et que si elle est finie alors elle est presque partout égale à un (on dit que $\tau(G,H,f)$ est sans multiplicités). Enfin, R. Lipsman les a établi lorsque H est un sous-groupe maximal de G ([63]). Cependant, dans le cas plus vaste où G est un groupe de Lie résoluble exponentiel et H un sous-groupe analytique de G, la propriété 2. n'est pas vraie (voir [26] et [55]), tandisque la question concernant les propriétés 1. et 3. reste jusqu'a présent ouverte.

L'étude des représentations unitaires montre qu'il existe un trés grand parallélisme entre les formules des multiplicités pour la désintégration de $\tau(G,H,\sigma)$ où $\sigma \in \hat{H}$ et celle pour la désintégration de $\pi_{|H}$ quand $\pi \in \hat{G}$. Rappelons les principaux résultats connus sur la désintégration des restrictions des représentations unitaires irréductibles. Le problème a été entrepris par Kirillov [51], pleinement étudié par Corwin-Greenleaf [22] pour le cas nilpotent, par Lipsman [54, 55] pour le cas complètement résoluble et par H. Fujiwara [38] pour le cas exponentiel. D'autre part, A. Baklouti et J. Ludwig ont déterminé une décomposition concrète de la représentation restreinte $\pi_{|H}$ d'un groupe de Lie nilpotent G afin de construire un opérateur d'entrelacement pour $\pi_{|H}$ ([7]).
Décrivons maintenant la désintégration de $\pi_{|H}$. Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On considère une représentation unitaire irréductible π associée à une orbite coadjointe $\Omega_\pi \subset \mathfrak{g}^*$, associée à une forme linéaire f. Si H est un sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, alors d'aprés H. Fujiwara ([38]), la désintégration centrale canonique de $\pi_{|H}$ s'obtient comme suit :

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} n_\pi(\sigma)\sigma d\nu(\sigma)$$

où $n_\pi(\sigma)$ désigne le nombre des H-orbites contenues dans $\Omega_\pi \cap p^{-1}(\Omega_\sigma^H)$ ($p : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ la projection canonique) et ν est la mesure image de la mesure canonique sur Ω_π par l'application $\Theta_H \circ p : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \hat{H}$. D'autre part, d'aprés les travaux de Corwin-Greenleaf [22, 23] et Lipsman [55, 58], la fonction de multiplicités $n_\pi(\sigma)$ vérifie les trois propriètés décrites plus haut a condition d'une petite modification dans 2. La propriété 2. sera remplacée par la propriété
4. Une condition nécessaire et suffisante pour la finitude des multiplicités est que pour presque tout σ dans le spectre de $\pi_{|H}$, nous ayons

$$\dim G \cdot f - 2\dim H \cdot \ f + \dim \Omega_\sigma^H = 0.$$

Dans la première partie de cette thèse, nous cherchons à obtenir des résultats similaires à ceux décrit ci-dessus concernant des représentations des groupes de Lie résolubles exponentiels qui font intervenir à la fois des représentations induites et des restrictions de représentations. C'est en fait ce qu'on appelle des représentations *mixtes* ou de *type mixte*. Plus précisément, ce sont des représentations de la forme $\rho(G,H,A,\sigma) = \mathrm{Ind}_H^G \sigma_{|A}$, ou $\rho(G,H,\pi) = \mathrm{Ind}_H^G(\pi_{|H})$, où A et H sont deux sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie résoluble exponentiel G, π et σ sont deux représentations unitaires irréductibles respectivement de G et H.

Nous abordons au deuxième chapitre, l'étude des représentations mixtes de la forme

$$\rho(G,H,A,\sigma) = \mathrm{Ind}_H^G \sigma_{|A}.$$

Comme motivation, l'étude de telles représentations porte un grand intérêt sachant que la décomposition des représentations mixtes et leur entrelacement nous fournit de nouvelles désintégrations *lisses* de $L^2(G)$ pour les groupes exponentiels (voir [5]). Une autre motivation vient originalement de la théorie des actions ergodiques comme l'explique R. Lipsman dans [56]. Ce dernier auteur étudie le spectre et les multiplicités d'un type particulier de représentations mixtes pour des groupes de Lie nilpotents connexes et simplement connexes. C'est la représentation

$$\rho(G, H, A) = \mathrm{Ind}_H^G 1_{|A}$$

qui était l'objet de l'étude en supposant que H est un sous-groupe fermé de G et A un sous-groupe abélien de G. Plus précisément, l'auteur a déterminé un spectre concret et une formule de multiplicités explicite en utilisant la méthode des orbites. Notre premier objectif dans ce chapitre est d'écrire des formules de désintégration des représentations mixtes pour tous les groupes de Lie résolubles exponentiels sans restrictions sur les sous-groupes H et A et sur la représentation $\sigma \in \hat{H}$. Un autre objectif de ce travail est de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles les multiplicités des représentations intervenant dans les composantes isotypiques de $\rho(G, H, A, \sigma)$ sont finies presque partout. Pour acquérir de telles conditions, il faut déjà que la représentation $\tau(\sigma) = \mathrm{Ind}_H^G \sigma$ soit à multiplicités finies et que pour presque tout $\pi \in \mathrm{spectre}(\tau(\sigma))$ la représentation $\pi_{|A}$ soit encore à multiplicités finies. Ces dernières conditions ne sont généralement pas suffisantes pour assurer la finitude des multiplicités de la représentation $\rho(G, H, A, \sigma)$.
Quand G est nilpotent, nous démontrons que les multiplicités de la représentation mixte $\rho(G, H, A, \chi)$ sont uniformément infinies ou uniformément finies et bornées. Nous exhibons aussi dans ce cas une condition nécessaire et suffisante pour la finitude de ces multiplicités. Ici, χ désigne un caractère unitaire de H. Cette condition porte manifestement sur les sous-groupes H et A et leurs actions sur certains espaces en faisant intervenir des ensembles *semi-algébriques*. Le fait de travailler en utilisant un caractère unitaire ne représente aucune perte de généralités dans ce cas. En effet, toutes les représentations unitaires et irréductibles sont monomiales et le résultat est déductible pour une représentation quelconque σ de H. Quand le groupe G est exponentiel et A s'avère une polarisation G-invariante pour certains éléments génériques, nous montrons que les multiplicités de la représentation $\rho(G, H, A, \sigma)$ coïncident avec celle de $\tau(\sigma)$ et sont uniformes, donc ne dépendent pas de A. Lorsque les sous-groupes H et A sont invariants (et G est exponentiel), nous montrons que la représentation mixte $\rho(G, H, A, \chi)$ est sans multiplicités ou à multiplicités uniformément égales à l'infini. Nous donnons alors des conditions nécessaires et suffisantes pour la finitude dans ce cas.
L'étude de telles représentations pourrait être faite plus généralement sur des groupes localement compacts. Mackey a étudié la désintégration de telles représentations quand A et H sont *régulièrement liés* (voir [69]). D'autre part J. Ludwig prouve dans le lemme 4.2 de [68] que si H et A sont des sous-groupes normaux d'un groupe localement compact G et $A \subset H$, alors le support de la représentation mixte $\rho(G, H, A, \sigma)$ est de la forme $(\sigma_{|A})^g,\ g \in G$ où $(\sigma_{|A})^g(a) = \sigma(g \cdot a \cdot g^{-1}),\ a \in A$.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des représentations mixtes de second type, c'est à dire de la forme

$$\rho(G, H, \pi) = \mathrm{Ind}_H^G(\pi_{|H}).$$

Notre point de départ est un résultat de J. Ludwig et Horst Leptin qui ont prouvé que si H est un sous-groupe analytique propre d'un groupe de Lie résoluble exponentiel G, alors la représentation unitaire $\rho(G, H, \pi)$ est réductible (voir [52]). Nous sommes intéressés d'abord à déterminer la formule orbitale du spectre de ce type de représentations pour les groupes de Lie résolubles exponentiels. Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème. *Soient G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $H = \exp \mathfrak{h}$ un sous-groupe fermé connexe de G. Soit π une représentation unitaire irréductible de G associée à l'orbite coadjointe Ω_π. On note par $d\Omega$ la mesure canonique sur $\Omega(\pi)$ et par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}^\perp$. Soit $\mu_\pi^{G,H}$ la mesure image de la mesure $(d\Omega \times \lambda)$ sur $\Omega(\pi) \times \mathfrak{h}^\perp$ par les applications*

$$\Omega(\pi) \times \mathfrak{h}^\perp \to p_{\mathfrak{h}}(\Omega(\pi)) \times \mathfrak{h}^\perp \to p_{\mathfrak{h}}(\Omega(\pi)) + \mathfrak{h}^\perp \to G \cdot (p_{\mathfrak{h}}(\Omega(\pi)) + \mathfrak{h}^\perp)/G = G \cdot (\Omega(\pi) + \mathfrak{h}^\perp)/G,$$

où $p_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ est la projection canonique. Alors la représentation $\rho(G, H, \pi)$ satisfait la formule orbitale du spectre :

$$\rho(G, H, \pi) \simeq \int_{G\cdot(\Omega(\pi)+\mathfrak{h}^\perp)/G}^{\oplus} m_\pi(\phi)\pi_\phi d\mu_\pi^{G,H}(\phi)$$

où

$$m_\pi(\phi) = \sum_{\Omega^H \in [p_{\mathfrak{h}}(\Omega(\pi)) \cap p_{\mathfrak{h}}(\Omega(\pi_\phi))]/H} n_\pi^{\Omega^H} n_{\pi_\phi}^{\Omega^H}$$

avec $n_\pi^{\Omega^H} = \#[\Omega(\pi) \cap p_{\mathfrak{h}}^{-1}(\Omega^H)]/H$ et $n_{\pi_\phi}^{\Omega^H} = \#[\Omega(\pi_\phi) \cap p_{\mathfrak{h}}^{-1}(\Omega^H)]/H$.

Dans un deuxième temps, nous passons à étudier la fonction de multiplicité $m_\pi(\phi)$. Dans cette étude, nous abordons les mêmes questions du chapitre précédent.

Le quatrième chapitre du mémoire est consacré à l'étude de la fonction de multiplicités des représentations induites et mixtes d'un groupe de Lie résoluble exponentiel. Dans la première partie, nous introduisons la définition d'un sous-groupe H adapté à un groupe de Lie exponentiel G. En effet, soient G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $H = \exp \mathfrak{h}$ un sous-groupe fermé connexe de G et f une forme linéaire de $\mathfrak{g}^*$ tel que $\langle f, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0$. En utilisant la stratification de $\mathfrak{g}^*$ sous l'action coadjointe de G due à Bradley N. Currey ([28] et [29]), soit U la première couche qui rencontre $f + \mathfrak{h}^\perp$. Par construction, $U \cap f + \mathfrak{h}^\perp$ est un ouvert de Zariski non vide de $f + \mathfrak{h}^\perp$. Nous dirons que la paire (H, f) est adaptée à G si l'ensemble

$$\Gamma = \{\phi \in U \cap f + \mathfrak{h}^\perp : \ \mathfrak{h} + \mathfrak{g}(\phi) \text{ est une polarisation en } \phi\},$$

est de complémentaire négligeable dans $f + \mathfrak{h}^\perp$. Cette définition, nous donne un partage des groupes de Lie résolubles exponentiels en deux familles. Enfin, nous démontrons le théorème suivant

Théorème. *Soit $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie résoluble exponentiel. Soient H un sous-groupe fermé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et χ_f un caractère unitaire de H associée à la forme linéaire f de $\mathfrak{g}^*$ tel que $\langle f, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0$. On suppose que la paire (H, f) est adaptée à G. Alors*
1. *Pour presque tout ϕ dans $\Gamma_f = f + \mathfrak{h}^\perp$, la multiplicité $m(\pi_\phi)$ qui apparait dans la décomposition (1) de $\rho(G, H, f)$ est finie si et seulement si la variété $G \cdot \phi \cap \Gamma_f$ est un ensemble semi-algébrique.*
2. *Si la fonction de multiplicités est uniformément finie, alors elle est bornée.*

Dans la deuxième partie du chapitre, nous nous intéressons d'obtenir les mêmes résultats que nous avons établi dans le cas des groupes de Lie nilpotents sur la fonction de multiplicités des représentations mixtes $\rho(G, H, A, \chi_f)$ et $\rho(G, H, \pi)$, pour les groupes de Lie complètement résolubles. Pour cela, nous introduisons, tout d'abord la définition des ensembles semi-pseudo-algébriques qui généralise la notion des ensembles pseudo-algébriques :

Définitions ([8]). **1**. *Soient f une fonction polynomiale à coefficients réels sur $\mathbb{R}^{m+k}$ et $\lambda_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq k$ des formes linéaires. La fonction*

$$F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x, e^{\lambda_1(x)}, \dots, e^{\lambda_k(x)}),$$

est appelée fonction pseudo-algébrique sur $\mathbb{R}^m$ de degré $\deg f$.

2. *Une partie A de $\mathbb{R}^m$ est appelée semi-pseudo-algébrique, si A s'écrit sous la forme*

$$A = \Big\{x \in \mathbb{R}^m : \ F_1(x) = \cdots = F_r(x) = 0,\ G_1(x) > 0, \dots, G_l(x) > 0\Big\},$$

où $F_1, \dots, F_r,\ G_1, \dots, G_l$ sont des fonctions pseudo-algébriques sur $\mathbb{R}^m$.

Ensuite, nous démontrons qu'un tel ensemble A admet un nombre fini de composantes connexes et que ce nombre est majoré par un scalaire qui dépend seulement de $m,\ r,\ l,\ k,\ \deg F_i$ et $\deg G_i$ mais ne dépend pas des coefficients des fonctions polynomiales et des formes linéaires.

Ce théorème nous permet d'établir, en utilisant les mêmes techniques que celle dans le cas nilpotent, que si G est un groupe de Lie complètement résoluble, alors les fonctions de multiplicités des représentations mixtes $\rho(G, H, A, f)$ et $\rho(G, H, \pi)$ sont uniformément infinies ou uniformément finies et bornées et nous avons donné une condition nécessaire et suffisante pour la finitude des multiplicités ([8]).

Dans le cinqième chapitre, nous nous intéressons à la construction d'un opérateur d'entrelacement entre $\rho(G, H, A, f)$ et sa désintégration, dans le cas où A et H sont deux sous-groupes distingués d'un groupe de Lie résoluble exponentiel G. Pour aboutir à un tel résultat nous sommes amenés à connaître des opérateurs d'entrelacements des représentations induites et des restrictions des représentations unitaires irréductibles. Pour la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^G \chi_f$, la question est résolue par A. Baklouti [5]. Dans son article, ce dernier auteur, a choisi une bonne suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ passant par $\mathfrak{h}$, à partir de la quelle, il détermine d'une manière précise un sous-espace V de $f + \mathfrak{h}^\perp$ tel que

$$\mathrm{Ind}_H^G \chi_f \simeq \int_V^{\oplus} \pi_\phi d\lambda(\phi), \tag{2}$$

et un opérateur d'entrelacement de (2). Dans la première partie de ce chapitre, nous cherchons un opérateur d'entrelacement de la représentation unitaire $\pi_{|H}$. Pour faire cela, nous choisissons une bonne suite $\mathfrak{s}$ de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ passant par $\mathfrak{h}$ à partir de la quelle nous construisons une base $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ de $\mathfrak{g}$, un ensemble indice $K_f^{H,\mathfrak{s}} = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ et un sous-ensemble

$$\mathcal{T} = \{\mathrm{Ad}^\star(R(T))f,\ T \in \mathbb{R}^k\}, \quad R(T) = \prod_{j=1}^{k} \exp(t_j X_{i_j})$$

de $G \cdot f$ tel que

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathcal{T}}^{\oplus} \sigma_{p(\phi)} d\lambda(\phi).$$

Notre opérateur R est donné par

$$R(\phi)(\xi)(h) = \xi(h \cdot g_\phi), \ h \in H,$$

où g_ϕ est l'unique élément de G tel que $\phi = \mathrm{Ad}^*(g_\phi)f$, ξ un élément de $L^2(G/B, f)$ a support compact modulo $B = \exp \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}$ la polarisation de Vergne en f construite à partir de la bonne suite $\mathfrak{s}$. Comme application de ces deux types de désintégration, nous déduisons un espace de désintégration W de notre représentation mixte $\rho(G, H, A, f)$, ainsi qu'une mesure $d\nu$ sur W telle que

$$\rho(G, H, A, f) \simeq \int_W^{\oplus} \sigma_{p_0(\psi)} d\nu(\psi).$$

Ensuite, nous construisons un opérateur d'entrelacement qui fait intervenir à la fois l'opérateur d'entrelacement de l'induite et l'opérateur d'entrelacement de la restriction.

Finalement, le sixième chapitre de la thèse est consacré à la formule de Bonnet-Plancherel pour l'espace homogène G/H où G est un groupe de Lie résoluble exponentiel et H est un sous-groupe analytique invariant de G. Nous nous basons sur l'article de Pierre Bonnet [16] où il démontre le théorème suivant :

Théorème. *Pour toute distribution de type positif T sur un groupe de Lie G de type I, il existe une mesure μ sur $\hat{G}$ le dual unitaire de G et un champ d'opérateurs nucléaires U_χ de $\mathcal{H}_{\pi_\chi}^{\infty}$ dans $\mathcal{H}_{\pi_\chi}^{-\infty}$ tels que :*

$$\langle T, \theta \rangle = \int_{\hat{G}} tr\ (\pi_\chi(\theta) U_\chi) d\mu(\chi),$$

pour toute fonction θ sur G de classe C^∞ à support compact.

L'article se situe dans le cas des groupes de Lie unimodulaires mais ce théorème en particulier reste vrai dans le cas des groupes de Lie de type I.

Si on considère maintenant le cas d'un groupe de Lie G, d'un sous-groupe fermé H de G et d'un caractère unitaire χ de H, on peut appliquer le théorème de P. Bonnet à la distribution de type positif δ_H définie par :

$$\delta_H(\varphi) = \int_H \varphi(h)\chi(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh, \qquad \forall \varphi \in D(G),$$

où dh est une mesure de Haar fixé sur H. On obtient alors une formule de Plancherel pour l'espace homogène G/H qui est de la forme :

$$\int_H \varphi(h)\chi(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\pi_\chi(\varphi) U_\chi) d\mu(\chi). \tag{3}$$

Quand le sous-groupe H est réduit à l'élément neutre de G, on trouve une formule de Plancherel pour le groupe G.

La classe de la mesure μ est connue, c'est celle de la mesure de la désintégration centrale de la représentation $\mathrm{Ind}_H^G \chi$ décrite en (1). On cherche maintenant à décrire les opérateurs U_χ de la formule (3). C'est ce qu'a fait H. Fujiwara dans le cas des groupes de Lie nilpotents [40], R. L. Lipsman dans le cas des espaces homogènes à spectre exponentiel [64] ou des espaces homogènes de Strichartz [65] et G. Grélaud dans le cas des espaces homogènes des groupes de Heisenberg [46] et des groupes de Lie nilpotents [47].

Soient G un groupe de Lie résoluble exponentiel, $H = \exp \mathfrak{h}$ un sous-groupe fermé connexe invariant de G et $f \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ tel que $\langle f, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\rangle = 0$. Soit H^f le stabilisateur dans G de la restriction $f_{|\mathfrak{h}}$ de f à $\mathfrak{h}$. Il existe une section de croisement Σ localement fermée des H^f-orbites dans $f + \mathfrak{h}^\perp$. Nous choisissons pour $\sigma \in \Sigma$ une polarisation de Vergne $\mathfrak{c}(\sigma)$ et pour $s \in H^f$, nous considérons $\delta_{s,\sigma}$ l'evaluation en s sur l'espace $\mathcal{H}^\infty_{\pi_\sigma}$ des vecteurs C^∞ pour π_σ. Posons $\mathfrak{a} = \ker f \cap \mathfrak{h}$ et $A = \exp \mathfrak{a}$. Nous définissons une fonction $i_A : H^f \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ par la relation

$$\int_A F(sxs^{-1})dx = i_A(s) \int_A F(x)dx, \quad s \in H^f$$

où F est dans $C_c(A)$. Nous prouvons que les opérateurs $U_{\pi_\sigma} = U_\sigma$ dans la formule de Bonnet-Plancherel sont des intégrales d'opérateurs $P_{s,\delta_{s,\sigma}}$ de rang un

$$U_\sigma = \oint_{H^f/C(\sigma)} P_{s,\delta_{s,\sigma}} d\lambda(s),$$

où $P_{s,\delta_{s,\sigma}}$ est définit sur $\mathcal{H}^\infty_\sigma$ par : $P_{s,\delta_{s,\sigma}}(\xi) = \Delta_G(s) i_A(s^{-1})\langle \xi, \delta_{s,\sigma}\rangle\ \delta_{s,\sigma}$. Dans la suite nous donnons la formule de Penney-Fujiwara Plancherel. En d'autres termes, nous prouvons l'existence d'un sous-espace affine V de $f + \mathfrak{h}^\perp$ tel que

$$S_{H,f} = \int_V S_{B(\phi),\phi} d\lambda(\phi).$$

A partir de cette dernière formule, on recouvre une désintégration de la représentation

$$\tau_f = \mathrm{Ind}_H^G \chi_f \simeq \int_V^\oplus \pi_{B(\phi),\phi} d\lambda(\phi),$$

qui est déjà obtenue par A. Baklouti dans [5].

Références

[1] Arnal D., Fujiwara H. et Ludwig J., *Opérateurs d'entrelacement pour les groupes de Lie exponentiels*, American journal of Mathematics 118 (1996), 839-878.

[2] Baklouti A., Ghorbel A. et Hamrouni H., *Sur les représentations mixtes des groupes de Lie résolubles exponentiels*, Publicacions Matemàtiques. 46 (2002), 179-199.

[3] Baklouti A., Ludwig J., *Désintégration des représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents*, Journal of Lie Theory, 9 (1999), 157-191.

[4] Baklouti A. and Hamrouni H., *On the down-up representations of exponential solvable Lie groups*, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol 8, No 4, (2001), 422-432.

[5] Baklouti A., *Nouvelle désintégration lisse de $L^2(G)$ pour les groupes résolubles exponentiels*, Journal of Lie Theory, 8 (1998), 25-50.

[6] Baklouti A. and Ludwig J., *The Penney-Fujiwara Plancherel Formula for nilpotent Lie groups*, J. Math. Kyoto Univ., 40, 1 (2000), 1-11.

[7] Baklouti A. et Ludwig J., *Entrelacement des restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 51, 2 (2001), 395-429.

[8] Baklouti A. and Hamrouni H., *The multiplicity function of induced and mixed representations on exponential solvable Lie groups*. Préprint.

[9] Baklouti A., *Opérateurs d'entrelacement des représentations unitaires et cortex des groupes de Lie nilpotents*, Thèse Univ. de Metz, 1995.

[10] Baklouti A., Ghorbel A. et Hamrouni H., *On the up-down representations of exponential solvable Lie groups*. Préprint.

[11] Benedetti R. and Risler J., J., *Real algebraic and semi-algebraic sets*. Hermann, Paris, 1990.

[12] Benoist Y., *Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels*, Mem. Math. Soc. France, 15 (1984), 1-37.

[13] Bernat P., *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 82 (1965), 37-99.

[14] Bernat P. et al., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris 1972.

[15] Bochnak J., Coste M., and Roy M., F., *Géométrie algébrique réelle*, Springer-Verlag, 1987.

[16] Bonnet P., *Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire*, Journal of Functional Analysis, 55 (1984), 220-246.

[17] Bruhat F., *Sur les représentations induites des groupes de Lie*, Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 97-205.

[18] Bruhat F., *Représentations des groupes localement compacts*. Ecole Normale Supérieure, 1971.

[19] Cartier P., *Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie*. Séminaire BOURBAKI. (454), 454-01-454-14, 1974/75.

[20] Chabot-Chevalarias N., *Formules de Plancherel pour des groupes de Lie résolubles exponentiels,* thèse Poitiers, 2001.

[21] Corwin L., Greenleaf F., P., *Representations of nilpotent Lie groups and their applications*, Part I, Cambridge Studies in Adv. Math., Vol. 18, Cambridge University Press, Cambridge/ New York, 1989.

[22] Corwin L., Greenleaf F., P., *Spectrum and multiplicities for restrictions of unitary representations in nilpotent Lie groups*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 135, No. 2 (1988), 233-267.

[23] Corwin L., Greenleaf F., P., *A canonical approch to multiplicity formulas for induced and restricted representations of nilpotent Lie groups*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLI (1988), 1051-1088.

[24] Corwin L., Greenleaf F., P., *Intertwining operators for representations induced from uniform subgroups*, Acta Math., 136 (1976), 275-301.

[25] Corwin L., Greenleaf F., P., *Integral formulas with distribution kernels for irreducible projections in L^2 of a nilmanifold*, J. Func. Analysis, 23 (1976), 255-284.

[26] Corwin L., Greenleaf F., P. and Grélaud G., *Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 304 (1987), 537-547.

[27] Corwin L., Greenleaf F., P. and Penney R., *A canonical formula for the distribution kernels of primary projections in L^2 of a nilmanifold*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 30 (1977), 355-372.

[28] Currey B., N. and Penney R., *The structure of the space of coadjoint orbits of a completely solvable Lie groups*, Michigan Math J., 36 (1989), 309-320.

[29] Currey B., N., *The structure of the space of coadjoint orbits on an exponential solvable Lie group*, J. Trans. Am. Math. Soc., 332, No.1 (1992), 241-269.

[30] Currey B., N., *Smooth decomposition of finite multiplicity monomial representation for a class of completely solvable homogeneous spaces*, Pacific. J. Math., 170 (1995), 429-460.

[31] Dixmier J., *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles*, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 113-121.

[32] Duflo M., et Rais M., *Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie resolubles* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér. 9 (1976), 107-144.

[33] Fujiwara H., *Certains opérateurs d'entrelacement pour des groupes de Lie résolubles exponentiels et leurs applications*, Mem. Fac. Sci. Kyushu. Univ. Ser. A, 36 (1982), 13-72.

[34] Fujiwara H., *Unitary representation theory for solvable Lie groups*, Sugaku Expositions, Amer. Math. Soc., 2 (1989), 125-140.

[35] Fujiwara H., Lion G. et Magneron, B., *Opérateurs d'entrelacement et calcul d'obstruction sur des groupes de Lie résolubles*, Lect. Notes in Math. Springer, 880 (1980), 102-137.

[36] Fujiwara H. et Yamagami S., *Certaines représentations monomiales d'un groupe de Lie résoluble exponentiel*, Adv. St. Pure Math., 14 (1988), 153-190.

[37] Fujiwara H., *Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels*, Progress in Math., 82 (1990), 61-84.

[38] Fujiwara H., *Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels*, Inventiones Mathematicae, 104 (1991), 647-654.

[39] Fujiwara H., *Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents*, Pacific J. Math., 127 (1987), 329-352.

[40] Fujiwara H., *La formule de Plancherel pour les représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents*, World Sci. Publishing, River Edge, (1992), 140-150.

[41] Fujiwara H., *Analyse harmonique pour certaines représentations induites d'un groupe de Lie nilpotent*, J. Math. Soc. Japan, 50 (1998), 753-766.

[42] Ghorbel A., Hamrouni H., Ludwig J. and Selmi M., *The Bonnet Plancherel formula for normal monomial representations of exponential solvable Lie groups*, soumis pour publication.

[43] GOODMAN R., *Elliptic and subelliptic estimates for operators in an enveloping algebras*, Duke Math., 74, 4 (1980), 819-834.

[44] GRÉLAUD G., *Sur les représentations des groupes de Lie résolubles*, thèse. Université de Poitiers, 1984.

[45] GRÉLAUD G., *Désintégration des représentations induites des groupes de Lie résolubles exponentiels*, Thèse de 3e cycle, Univ. de Poitier, 1973.

[46] GRÉLAUD G., *La formule de Plancherel pour les espaces homogénes des groupes de Heisenberg*, J. Reine angew. Math., 398 (1989), 92-100.

[47] GRÉLAUD G., *La formule de Plancherel pour les espaces homogénes des groupes de Lie nilpotents*, Preprint 1991.

[48] GRÉLAUD G., *On the representations of simply connected nilpotent and solvable Lie groups*, Prépublication n 76, Univ. de Poitiers, 1993.

[49] HERRERA M., E., *Integration on a semianalytic set.* Bull. Soc. Math. France, 94 (1966), 141-180.

[50] HÖRMANDER L., *The Analysis of linear partial differential operators II*, Springer, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 257.

[51] KIRILLOV A., A., *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, Uspekhi Math. Nauk, 17 (1962), 57-110.

[52] LEPTIN H. AND LUDWIG, J., *Unitary representation theory of exponential Lie groups*, De Gruyter Expositions in Mathematics 18, 1994.

[53] LION G., *Intégrale d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indice de Maslov*, Lect. Notes in Math. Springer, 587 (1977), 160-176.

[54] LIPSMAN R., *Restricting representations of completely solvable Lie groups*, Can. J. Math., XLII.No 5 (1990), 790-824.

[55] LIPSMAN R., *Orbital parameters for induced and restricted representations*, Trans. Amer. Math. Soc., 313 (1989), 433-473.

[56] LIPSMAN R., *The up-down formula for nil-homogenous spaces*, Annali di Matematica pura ed applicata, (IV),Vol. CLXVI (1994), 291-300.

[57] LIPSMAN R., *Induced representations of completely solvable Lie groups*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 17 (1990), 127-164.

[58] LIPSMAN R., *The multiplicity function on exponential and completely solvable homogeneous spaces*, Geometriae Dedicata, 39 (1991), 155-161.

[59] LIPSMAN R., *Attributes and applications of the Corwin-Greenleaf multiplicity function.* Contemporary Mathematics, 177 (1999), 27-46.

[60] LIPSMAN R., *The Penney-Fujiwara Plancherel formula for homogeneous spaces*, Representation Theory of Lie groups and Lie algebras, (Fuji-Kawaguchiko, 1990), World Sci. Pub., River Edge, NJ. (1992), 120-139.

[61] Lipsman R., *The Penney-Fujiwara Plancherel formula for symmetric spaces*, 135-145, dans : Duflo M., Pedersen N. V., Vergne M. (eds) The orbit method in representation theory. Proceeding, Copenhagen 1988 ; Birkhauser, 1990.

[62] Lipsman R., *The Penney-Fujiwara Plancherel formula for abelian symmetric spaces and completely solvable homogeneous spaces*, Pacific J. math., 151 (1991), 265-295.

[63] Lipsman R., *Representations of exponential solvable Lie groups induced from maximal subgroups*, Michigan Math. J., 40 (1993), 299-320.

[64] Lipsman R., *The Plancherel formula for homogeneous spaces with exponential spectrum*, 1997.

[65] Lipsman R., *A unified approach to concrete Plancherel theory of homogeneous spaces*, Manuscripta Mathematica, 94 (1997), 133-149.

[66] Lojasiewicz S., *Triangulations of semianalytic sets.* Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, 18 (1964), 449-474.

[67] Ludwig J. and Muller D., *Sub-Laplacians of holomorphic L^P-type on rank one AN-groups and related solvable groups*, Journal of Functional Analysis, 170 (2000), 366-427.

[68] Ludwig J., *Dual Topology of Diamond groups*, J. Reine Angew. Math., 467 (1995), 67-87.

[69] Mackey G., W., *The theory of unitary group representations*, Chicago Lect. Math., 1976.

[70] Mackey G., W., *Induced representations of locally compact groups*, II, Ann. Math., 58 (1953), 193-221.

[71] Mackey G., W., *Borel structure in groups and their duals*, Trans. Amer. Math. Soc., 85 (1957), 134-165.

[72] Penney R., *Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem*, J. Func. Anal., 18 (1975), 177-190.

[73] Poulsen N., *On $C^\infty-$vectors and intertwining bilinear forms for representation of Lie groups*, J. Func. Anal., 18 (1975), 177-190.

[74] Pukanszky L., *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.

[75] Pukanszky L., *On the theory of exponential groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 126 (1967), 487-507.

[76] Pukanszky L., *Unitary representations of solvable Lie groups*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., t.4 (1971), 457-608.

[77] Quint S., R., *Decomposition of induced representations of solvable exponential Lie groups*, Dissertation, Univ. of California, Berkeley 1973.

[78] Risler J., J., *Some aspects of complexity in real algebraic geometry*, J. Symbolic computation, 5 (1988), 109-119.

[79] Takenouchi O., *Sur la facteur représentation des groupes de Lie de type (E)*, Math. J. Okayama Univ., 7 (1957), 151-161.

[80] TARSKI A., *A decision method for elementary algebra and geometry*, 2nd ed. Univ. of California Press, Berkeley, 1951, 63 pp.

[81] VERGNE M., *Etudes de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 3 (1970), 353-384.