Name: Hanène Koubâa.

Title: Analyse harmonique sur certains espaces homognes exponentiels.

Position: "Assistant-Professor" at "Faculty of Sciences of Sidi Bouzid".

Date of defense: October 19, 2012.

Referees: Gasmi Azaiez (Valence) and Mohamed Selmi (Sousse).

Abstract: Mon mémoire comporte deux parties:

1. Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\ \ ])$ qui agit sur lui même par représentation adjointe ad:

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Le groupe G agit sur $\mathfrak{g}^*$, l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ par représentation coadjointe Ad^*:

$$< \mathrm{Ad}^*_g\, l, Y >=< l, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\mathrm{ad}_X)^n(Y) >, \quad g = \exp X \in G, \quad Y \in \mathfrak{g}.$$

Soient Ω_l la G-orbite de l et $\mathfrak{g}(l)$ son stabilisateur. Si $\mathfrak{g}(l)$ est $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-invariant, l'orbite Ω_l est dite plate.
Soit π une représentation unitaire irréductible de G et Ω_π l'orbite associée. En 1977, Jean Ludwig a montré que le noyau de π dans l'algèbre de groupe $L^1(G)$ est l'ensemble des fonctions dont la transformée de Fourier s'annule sur l'orbite Ω_π si et seulement si l'orbite Ω_π est plate. L'objet général du travail effectué est de prouver un résultat équivalent pour un groupe de Lie complètement résoluble: Pour Ω_π supposée fermée: il s'agit de démontrer le résultat fondamental suivant:
$\ker_{L^1(G)} \pi = \{f \in L^1(G), \mathcal{F}[(f \circ \exp) j_{\mathfrak{g}}](\Omega_\pi) = 0\}$ si et seulement si l'orbite Ω_π est plate.
Ici, $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier, et $j_{\mathfrak{g}}(X)$ désigne le jacobien de la translation à gauche par le vecteur X de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

2. Soient G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G et Γ un sous-groupe de G qui opère naturellement sur G/H. Pour un sous-groupe discontinu Γ pour G/H, l'espace des paramètres est défini par:

$$\mathscr{R}(\Gamma, G, H) := \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ est injective et } \varphi(\Gamma) \\ \text{sous-groupe discontinu} \\ \text{ pour } G/H \end{array} \right\}.$$

muni de la topologie de la convergence simple. L'espace de déformation de Γ est l'espace quotient:

$$\mathcal{T}(\Gamma, G, H) := \mathcal{R}(\Gamma, G, H)/G,$$

où l'action de G sur $\mathcal{R}(\Gamma, G, H)$ est définie par:
Pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$g.\varphi(\gamma) = g\varphi(\gamma)g^{-1}.$$

Cette partie de la thèse concerne des propriétés géométriques et topologiques des espaces des paramètres et de déformation. Notre premier résultat dans cette partie est le suivant: Soit $\pitchfork(\Gamma : G)$ l'ensemble de tous les sous-groupes fermés connexes de G pour lesquels Γ est un sous-groupe discontinu pour G/H.

Théorème: *Soit G un groupe de Lie nilpotent filiforme connexe simplement connexe et Γ un sous-groupe discret non-abélien de G de rang k. Alors:*

(1) *Pour tout $H \in \pitchfork(\Gamma : G)$, l'espace de déformation est un espace de Hausdorff.*
(2) *Pour $k > 3$, l'espace de déformation est muni d'une structure de variété différentielle.*
(3) *Pour $k = 3$, l'espace de déformation est une réunion disjointe d'une variété ouverte dense et d'une sous-variété fermée.*

Nous nous sommes intéressés dans une deuxième étape à l'étude des caractéristiques topologiques de l'espace de déformations, comme la rigidité locale et la stabilité. Il s'agit d'étudier la conjecture suivante posée par A. Baklouti.

Conjecture:
Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe, H un sous groupe de Lie connexe de G et Γ un sous-groupe non-trivial discontinu pour l'espace homogène G/H. Alors la rigidité locale tombe en défaut.

Nous donnons une preuve de cette conjecture pour les groupes de Lie filiformes.
D'autre part, nous prouvons que tout sous-groupe discret Γ non-abélien d'un groupe de Lie filiforme est stable. Stable, veut dire ici que l'espace des paramètres $\mathscr{R}(\Gamma, G, H)$ est un ouvert dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ pour tout $H \in \pitchfork(\Gamma : G)$. Dans ce cas, si Γ est non-abélien ou abélien et maximal, alors Γ est stable.