Name : Smaoui Kais.
Title : Estimation de la norme de la transforme de fourier l^p sur les groupes de lie exponentiels et quelques principes d'incertitude.
Position : Maitre Assistant at Sfax University.
Date of defense : June 5, 2005.
Referees : Kamel Mokni.
Abstract : Le but de cette thèse est d'étudier deux types de problèmes en analyse harmonique non-commutative, l'estimation de la norme de la transformée de Fourier L^p et l'étude de certains principes d'incertitude. Ces deux problèmes sont bien étudiés dans le cadre des groupes abéliens et on se propose justement de les étendre au cas des groupes de Lie non-abéliens. Notre étude se réalise dans le cadre des groupes de Lie résolubles exponentiels connexes et simplement connexes. La méthode des orbites qui est bien étudiée dans ce cadre se montre alors un outil trés efficace et primordial pour notre étude, c'est ce que on utilise d'ailleurs dans tout le texte. Issue de cette théorie, la théorie de Plancherel qui est aussi largement investie dans ce contexte, s'avère un moyen utile et puissant pour l'étude de ce type de problèmes. Nous donnons dans ce qui suit, un aperu général de notre travail et les principaux résultats obtenus.

Soit ϕ une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier $\hat{\phi}$ de ϕ est définie par :

$$\hat{\phi}(y) =: \mathcal{F}\phi(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)e^{-2i\pi xy}dx.$$

Soient $1 < p \leq 2$, q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$. L'inégalité de Hausdorff-Young est donnée par :

$$\|\mathcal{F}\phi\|_q \leq \|\phi\|_p.$$

Cette inégalité permet d'étendre l'application transformée de Fourier en un opérateur, noté $\mathcal{F}^p$, continu sur $L^p(\mathbb{R}^n)$. La norme de $\mathcal{F}^p$, notée $\|\mathcal{F}^p(\mathbb{R}^n)\|$, est appelée la norme de la transformée de Fourier L^p de $\mathbb{R}^n$. W. Beckner a montré que $\|\mathcal{F}^p(\mathbb{R}^n)\| = A_p^n$, où $A_p = (\dfrac{p^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{q}}})^{\frac{1}{2}}$.

On se place dans un groupe G localement compact séparable unimodulaire de type I. Soient dg la mesure de Haâr sur G et μ la mesure de Plancherel sur $\hat{G}$ associée à dg. L'inégalité de Hausdorff-Young contribue à l'introduction de la norme de la transformée de Fourier L^p. Cette inégalité affirme que pour $\phi \in L^1(G) \cap L^p(G)$, $1 < p \leq 2$ et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$\|\mathcal{F}\phi\|_q \leq \|\phi\|_p,$$

où $\mathcal{F}\phi(\pi) = \pi(\phi) = \int_G \phi(g)\pi(g)dg \quad (\pi \in \hat{G})$, $\quad \|\mathcal{F}(\phi)\|_q = (\int_{\hat{G}} \|\pi(\phi)\|_{C_q}^q d\mu(\pi))^{\frac{1}{q}}$ et $\|\pi(\phi)\|_{C_q} = (\mathrm{tr}(\pi(\phi)^\star\pi(\phi))^{\frac{q}{2}})^{\frac{1}{q}}$.

L'extension de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ sur $L^p(G)$ définit un opérateur continu, sur $L^p(G)$, noté $\mathcal{F}^p$. La norme de l'opérateur $\mathcal{F}^p$ sera notée $\|\mathcal{F}^p(G)\|$ et appelée norme de la transformée L^p de G. Cette norme a été l'objet d'étude par plusieurs chercheurs qui ont tenté de donner des estimations à cette norme.

Dans le second chapitre de cette thse, nous prouvons que pour un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe arbitraire,

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq A_p^{\frac{2\dim G - m}{2}},$$

où m est la dimension maximale des orbites coadjointes, étendant ainsi une série de travaux étudiant des cas particuliers.

Afin d'obtenir ce résultat, nous utilisons une version localisée de la formule de Plancherel qui fait intervenir des sous-groupes centraux de G, des arguments de récurrence et la formule d'estimation des noyaux de Fournier-Russo.

Soient maintenant G un groupe localement compact, non unimodulaire, séparable et de type I et $\hat{G}$ le dual unitaire de G. Pour chaque $\pi \in \hat{G}$, on note K_π le degré formel de π qui est défini sur $\mathcal{H}_\pi$, l'espace de la représentation π. Soit $\phi \in L^1(G) \cap L^p(G)$. En prenant $\mathcal{F}\phi(\pi) = \pi(\phi)K_\pi^{\frac{-1}{q}}$ comme définition de la transformée de Fourier de ϕ appliquée à un élément π de $\hat{G}$, Terp ont généralisé l'inégalité de Hausdorff-Young aux groupes non unimodulaires.

Dans le troisième chapitre, nous étudions ce problème dans une classe de groupes de Lie exponentiels qui vérifie la condition de Boidol forte. En utilisant la description de la mesure de Plancherel localisé donné par Duflo et Rais, nous établissons une estimation de la norme de la transformée de Fourier L^p de G compatible à celle du cas nilpotent.

Dans la dernière partie de cette thèse nous étudions certains principes d'incertitude sur les groupes de Lie nilpotents non commutatifs. De faon générale, les principes d'incertitude discutent le fait qu'une fonction intégrable ne peut jamais être finement localisée ainsi que sa transformée de Fourier. On s'intéresse d'abord à généraliser le résultat de Morgan [**?**] qui s'énonce dans le cas de la droite réelle comme suit :

Soient $p \geq 2$, q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et a, b, C des constantes positives. Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

i) $|f(x)| \leq C\mathrm{e}^{-a\pi|x|^p}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

ii) $|\hat{f}(x)| \leq C\mathrm{e}^{-b\pi|\xi|^q}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Alors $f = 0$ presque partout, si $(ap)^{\frac{1}{p}}(bq)^{\frac{1}{q}} > 2(\sin(\frac{\pi}{2}(q-1)))^{\frac{1}{q}}$. Pour le cas o $p = q = 2$, ce résultat n'est que le théorme de Hardy classique. Nous généralisons ce théorème aux cas des groupes de Lie nilpotents. En prenant des normes convenables euclidiennes sur G et sur $\mathfrak{g}^*$, nous obtenons le même résultat que dans le cas de la droite réelle mais pour $p \geq p_0$ où p_0 est un nombre trés proche de 2.

Enfin, nous étudions le théorème de Beurling sur les groupes de Lie qui décrte que pour une fonction intégrable non-nulle f, la fonction $f(x)\hat{f}(y)$ ne peut pas être intégrable par rapport la mesure $\mathrm{e}^{2\pi|xy|}dxdy$. Ce résultat a été généralisé sur $\mathbb{R}^n$ par Bagchi et Ray. Nous prouvons un analogue à ce résultat pour une classe des groupes de Lie nilpotents dite de type SNPC qui est une famille de groupes de Lie nilpotents admettant un idéal commun polarisant pour tout les éléments génériques de $\mathfrak{g}^*$.